Université Joseph Fourier, site de Valence

Année 2015-2016, Mat233

# Feuille de TD numéro 0 : révisions sur l'algèbre linéaire

Dans cette feuille, $E$ est un $K-$ espace vectoriel, et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On demande de répondre par OUI ou par NON à chacune des question, en justifiant la réponse.

**1.** On considère $u$ et $v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $Vect\,(u,v) = Vect\,(u+v, u-v)$

**2.** Si $(e_1, e_2)$ est une base de $E$, alors $(e_1+e_2, e_1-e_2)$ est une base de $E$.

**3.** Il existe un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $Vect\,(u) = \mathbb{R}^2$.

**4.** Les vecteurs $u_1 = (1,-1,1)$ , $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (1,1,3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

**5.** Si $F$ est un sous-espace vectoriel d'un espace $E$, alors $F + (-F) = \{0\}$ , où l'on a noté $-F = \{-x \mid x \in F\}$ .

**6.** $(1,0,0) + Vect\,\{(1,1,1), (1,0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**7.** Si $u$, $v$ et $w$ sont trois vecteurs deux à deux non colinéaires de $\mathbb{R}^3$, alors ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

**8.** L'ensemble des solutions du système linéaire $\left\{\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**9.** Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (1,1,1,-1)$ , $u_2 = (1,-1,-2,1)$ , $u_3 = (2,-4,-7,5)$ et $u_4 = (-1,1,1,1)$ est de dimension 3.

**10.** $\{0\}$ et $\varnothing$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

**11.** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors $(F+G) \cup F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**12.** On considère $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ dans $K$ non tous nuls. L'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ admet comme solution un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

**13.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f\,(x,y,z) = (x-y, y-z)$ . Cette application est linéaire.

**14.** On considère l'application $f : \mathbb{R}[\mathbb{X}] \to \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ définie par $f\,(P) = P + P'$ , où $P'$ désigne le polynôme dérivé de $P$. L'application $f$ est linéaire.

**15.** On considère l'application $f : \mathbb{R}[\mathbb{X}] \to \mathbb{R}$ définie par $f\,(P) = P\,(0) + P\,(2)$ . L'application $f$ est linéaire.

**16.** On considère une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$. L'ensemble $\ker f = \{x \in E \mid f\,(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**17.** Si $E$ est un espace-vectoriel de dimension $n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire, alors $\ker f$ est de dimension $n-1$.

**18.** On donne $e = (e_1, e_2)$ une base de $E$ et $f : E \to E$ l'application linéaire définie par :

$$f\,(e_1) = e_1 + 2e_2 \quad \text{et} \quad f\,(e_2) = 3e_1 + 4e_2$$

La matrice de $f$ dans la base $e$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**19.** Avec les données de la question précédente, on pose $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = 3e_1 + 4e_4$. La matrice de $f$ dans les bases $e$ au départ et $u = (u_1, u_2)$ à l'arrivée est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**20.** La matrice, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$, de l'application $f$ de la question 13 est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.