Université Joseph Fourier site de Valence
Année 2012/2013
Examen Mat 233 Session 1
Lundi 7 janvier 2013

Exercice 1 *On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A.*
2. *Donner des bases des sous-espaces propres de A. A est -elle diagonalisable ?*
3. *Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
4. *On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par les relations de récurrence*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 5v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 2w_n \end{cases}, \ n \in \mathbb{N},$$

et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$. Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.*

1. *Montrer que $\ker(Id_E - p) = Im(p)$.*
2. *Montrer que $\ker p \cap Imp = \{0\}$.*
3. *Montrer que pour tout $x \in E$, on a $x - p(x) \in \ker p$. En déduire que $E = \ker p \oplus Imp$.*
4. *Montrer que si p est un projecteur alors $Id_E - p$ est aussi un projecteur de E. (On rappelle que Id_E désbigne l'application identité de E).*
5. *Déduire de ce qui précède que $\ker(p) = Im(Id_E - p)$.*

Exercice 3 *Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que*

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - 5\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

(On pourra poser $g(u, v) = f(x, y)$ avec $u = x$ et $v = 5x + 2y$.)

Exercice 4 1. *On considère* $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq x+2, y \geq -x\}$. *Représenter le domaine* D_1 *et calculer directement*

$$I = \iint_{D_1} (x-y)dxdy$$

2. *Soit* $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$. *Représenter* D_2 *et calculer*

$$I = \iint_{D_2} (4-x^2-y^2)dxdy$$