Université Joseph Fourier, site de Valence
Mat233, année 2015-2016
CC du 6 novembre 2015. Durée : 2 heures

Calculatrices, tablettes téléphones portables et documents interdits

Exercice 1

1. On considère les trois vecteurs $b_1 = (1, -1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, -1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^4$

a. Calculer la dimension du sous-espace vectoriel $V = vect\,(b_1, b_2, b_3)$.

b. Montrer que $v = (1, 2, 3, -6)$ appartient à V.

c. On pose $b_4 = (1, 1, 1, 1)$.

Montrer que (b_1, b_2, b_3, b_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

d. Déterminer les composantes (w_1, w_2, w_3, w_4) du vecteur $w = (3, 4, 6, 7)$ dans la base (b_1, b_2, b_3, b_4) .

2. On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $f\,(b_4) = 3b_4$ et $f\,(u) = 2u$ si $u \in V$

a. Calculer $f\,(v)$ où v est le vecteur défini à la question 1.b.

b. Calculer $f\,(w)$ où w est le vecteur défini à la question 1.d.

c. Ecrire la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3, b_4) .

d. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Exercice 2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A.

2. Donner avec une justification la dimension de l'image $\mathrm{Im}(A)$.

3. Donner une base du noyau $\ker(A)$ de A.

Exercice 3

On considère la matrice carrée d'ordre n :

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3^2 & 7 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (n-1)^2 & 2n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{pmatrix}$$

Démontrer par récurrence que $\det B_n = (n+1)!$

Exercice 4 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

3. Donner la matrice de f dans la base de vecteurs propres trouvée ci-dessus.