2014-2015 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Devoir surveillé du 6 novembre 2014, durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.

Questions de cours :

1. Rappeler les définitions de :
   (a) une fonction réelle f à valeurs dans $\mathbb{R}$;
   (b) l'image réciproque par f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable en $x_0 \in]a, b[$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
3. Donner la solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 10$.

Exercice 1. Dans cet exercice, les réponses non justifiées seront comptées comme fausses.

1. Simplifier les expressions suivantes :
$$\ln_{10}(10000) \quad , \quad (\mathrm{e}^{6\ln 2})^{\frac{1}{3}} \quad , \quad \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{2}+1}}{(\mathrm{e}^{\sqrt{2}})^2} \quad , \quad \sin(\arccos u)) \ ,$$
   où u est un nombre réel compris entre -1 et 1.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \sin\theta + \cos(\frac{\theta}{4})$ est-elle périodique?

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(t) = \mathrm{e}^{|t|}$.

1. Donner le domaine de définition de f et calculer sa dérivée $f'(t)$ aux points t où f est dérivable.
2. Déterminer le tableau de variations de f et tracer la courbe représentative de f.
3. Soit $b > 1$. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[1, b]$. Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$$f_1(x) = \sin(x^2)(\cos x)^3 \quad , \quad f_2(t) = 7^t \qquad f_3(x) = \ln(3x^2 + 2) \quad , \quad f_4(x) = \arctan(x) \ .$$

Exercice 4. On considère la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sinh(t)}{t} \end{array} \right. .$$

1. f est-elle paire/impaire?

2. Montrer par un calcul de dérivée que la fonction $g(t) = t - \tanh(t)$ est strictement croissante sur $]0, \infty[$.

3. Exprimer la dérivée de f en fonction de g puis donner le tableau de variations de f.

4. f est-elle injective sur $\mathbb{R}^*$? Est-elle injective sur $]0, \infty[$?

Exercice 5. Soit k un entier relatif et $I_k =](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[$.

1. Montrer que la fonction
$$f_k : \left\{ \begin{array}{lll} I_k & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \tan\theta \end{array} \right.$$
est strictement croissante sur l'intervalle I_k. En conclure que f_k est injective sur I_k.

2. Vous admettrez que $f_k(I_k) = \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que f_k est une bijection de I_k dans $\mathbb{R}$ et donc admet une fonction réciproque $f_k^{-1} : \mathbb{R} \to I_k$. En conclure que pour tout $u \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul réel $\theta_k \in I_k$, qui vaut $\theta_k = f_k^{-1}(u)$, tel que
$$\tan(\theta_k) = u \ .$$

3. Montrer que $\tan(\theta_0 + k\pi) = u$ avec $\theta_0 = f_0^{-1}(u) = \arctan(u)$.

4. En conclure que pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$f_k^{-1}(u) = \theta_k = \arctan(u) + k\pi \ .$$

5. Tracer sur un même dessin les courbes représentatives de f_0, f_1, f_0^{-1} et f_1^{-1}.