2013-2014 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Devoir surveillé du 7 novembre 2013, durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisées.

Questions de cours :

1. Soit f une fonction réelle de domaine de définition $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Donner la définition de l'image réciproque $f^{-1}(I)$ de I par f.
2. Énoncez le théorème de la bijection.
3. Donner la formule de la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f en fonction de f et f'.
4. Donner la solution de l'équation différentielle $y''+9\,y=0$ avec les conditions initiales $y(\pi)=1$ et $y'(\pi)=1$.
5. Donner les dérivées des fonctions

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto 2^t \quad \text{ et } \quad g : t \in \mathbb{R} \mapsto \cosh(t^2)\sinh^3(t)\ .$$

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \theta \sin\theta$.

1. f est-elle paire ou impaire ? (vous justifierez votre réponse) Est-elle périodique ? (répondre par oui ou non sans justifier)
2. Donner les valeurs de θ pour lesquelles $f(\theta)$ s'annule et les intervalles sur lesquelles f est positive.
3. Montrer que $f'(\theta) = 0 \ \Leftrightarrow\ \tan\theta = -\theta$.
4. On veut résoudre l'équation $\tan\theta = -\theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $g : \theta \mapsto \tan\theta + \theta$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g est strictement croissante et continue sur l'intervalle $](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}[$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'équation $\tan\theta = -\theta$ a une unique solution $\theta = \theta_k$ sur l'intervalle $](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}[$. Déterminer θ_0.
   (c) Tracer l'allure du graphe de la fonction tan sur l'intervalle $I =]-\frac{7\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}[$.
   Trouver une méthode graphique permettant de déterminer approximativement sur votre dessin tous les réels $\theta \in I$ tels que $\tan\theta = -\theta$.
   (d) Par quels valeurs peut-on approximer θ_k quand $k \to \infty$ et quand $k \to -\infty$? (vous justifierez votre réponse sur votre dessin, sans essayer une démonstration rigoureuse).
5. Tracer l'allure du graphe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Vous représenterez les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pour $k = -3, -2, \ldots, 1, 2$, les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, et les tangentes horizontales à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{e}^{\theta} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \ .$$

À l'aide de deux intégrations par parties, trouver une relation algébrique satisfaite par I. En déduire la valeur de I.

Exercice 3. Calculer l'intégrale suivante en faisant le changement de variable $u = \sqrt{x}$:

$$J = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} \ .$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale

$$K = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^n} \ .$$

Exercice 5. Soit b un réel. En utilisant un changement de variables judicieux, montrer l'identité :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{bt} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4}} \int_{-\frac{b}{2}}^{1-\frac{b}{2}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \ .$$