2015-2016 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Feuille de TD 4 : sommes de séries arithmétiques et géométriques, formule du binôme, nombres complexes et fonction exponentielle

---

Exercice 1. Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

- $1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + a^{38}$
- $1000 + 1010 + 1020 + 1030 + \cdots + 1150$
- $3 - 6 + 9 - 12 + \cdots + 303$
- $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{2007}{2008}$.

Exercice 2. Simplifier l'écriture des nombres A, B et C en effectuant des changements d'indices dans certaines sommes :

$$A = \sum_{j=10}^{20} (20-j)^2 \quad , \quad B = \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{j} - \sum_{k=2}^{51} \frac{1}{k} \quad , \quad C = \sum_{j=1}^{10} \ln\left(\frac{j}{j+1}\right) .$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

$$(1)\ \sum_{j=1}^{n} 2^j = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \quad (2)\ \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n-1 \quad (3)\ \sum_{j=0}^{n} 2^j + \sum_{j=1}^{n} 2^{n+j} = \sum_{j=0}^{2n} 2^j$$

$$(4)\ \sum_{j=1}^{n} 2^n = n \times 2^n \quad (5)\ \prod_{j=0}^{n} (2j+1) = (2n+1)! \quad (6)\ \frac{\prod_{j=1}^{n} j^2}{\prod_{k=1}^{n} k} = n!$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^j$.

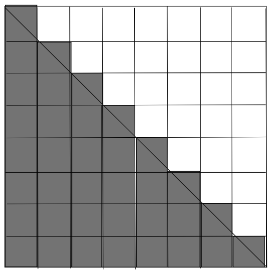
1. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{j+1} - \sum_{j=0}^{n} 2^j$.
2. En déduire que $S_n = 2^{n+1} - 1$.
3. Retrouver cette formule en notant que S_n est la somme d'une série géométrique.

Exercice 5. Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \geq m \geq 0$. Calculer les sommes :

$$A = \sum_{j=0}^{n} (5j+2) \quad , \quad B = \sum_{j=m}^{n} j \quad , \quad C = 1 - 3^2 + 3^4 + \cdots + (-1)^n 3^{2n} \quad ,$$

$$D = \sum_{j=m}^{n} \frac{1}{3^j} \quad , \quad E = \sum_{j=0}^{n} 2^j 3^{n-j} .$$

Exercice 6. Retrouver géométriquement la valeur de la somme de la série arithmétique $\sum_{j=1}^{n} j$ en vous inspirant du dessin ci-dessous :



Exercice 7. On veut déterminer la valeur de $S_n(q) = \sum_{m=1}^{n} m\, q^m$ pour $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Que vaut $S_n(1)$?
2. Supposons $q \neq 1$. Calculer $R_n(q) = \sum_{m=0}^{n} q^m$ et en déduire la valeur de $\sum_{m=1}^{n} m\, q^{m-1}$.
3. Montrer que si $q \neq 1$, alors
$$S_n(q) = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(1-q)^2} .$$

Exercice 8. Montrer les identités suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$(1)\ \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 2^{3m-1} = \frac{9^n}{2} \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$
$$(3)\ \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{m} = 2^{2n-1} + \frac{(2n)!}{2(n!)^2} .$$

Exercice 9. Calculer la probabilité de trouver les 3 chevaux gagnants dans l'ordre ou le désordre si vous jouez au tiercé, sachant que 10 chevaux sont au départ de la course. Vous supposerez que tous les chevaux ont la même probabilité de gagner.

Exercice 10. Soit n un entier naturel. Donner la décomposition en éléments simples de la fonction fraction rationnelle
$$f(x) = \frac{n!}{x(x-1)\cdots(x-n)} .$$

Exercice 11. Simplifier et déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes
$$\frac{15+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \quad , \quad \mathrm{e}^{-\ln 3 + \mathrm{i} \ln 2} \quad , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{13\pi}{2}} \quad , \quad \mathrm{e}^{\pi(1+\mathrm{i})^3} \quad , \quad \exp\Big(\frac{\pi}{18}(1+2\mathrm{i})^4\Big) .$$

Exercice 12. Déterminer les modules et arguments et écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
$$\frac{1}{1+\mathrm{i}} \quad , \quad 3+3\mathrm{i} \quad , \quad 1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i}\sqrt{2}) \quad , \quad \frac{\cos(\frac{\pi}{12}) - \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{5\pi}{12}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{12})} \quad , \quad \frac{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(\sin(\frac{\pi}{5}) + \mathrm{i}\cos(\frac{\pi}{5}))}{2(1-\mathrm{i})(\cos(\frac{\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{5}))}$$

Exercice 13. Soit $\theta \in [0, \pi]$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $a = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\theta}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\theta}$ et $c = \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})$.

Exercice 14. Soit n un entier naturel. Montrer les identités

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \mathrm{i}^{\,m} = 2^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 3^{\frac{m}{2}} \mathrm{i}^{\,m} = 2^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{\pi}{3}} .$$

Exercice 15. Déterminer toutes les solutions complexes des équations ci-dessous.

$$(1)\ \ z^3 = -8\mathrm{i} \quad , \quad (2)\ \ z^4 = -4 \quad , \quad (3)\ \ z^6 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} .$$

Exercice 16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut zero.

Exercice 17. Soient θ et φ deux réels, avec $\theta \neq 0\,[2\pi]$. Déterminer en fonction de θ et φ les sommes

$$C_n = \sum_{m=0}^{n} \cos(m\theta + \varphi) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{m=0}^{n} \sin(m\theta + \varphi)$$

(on pourra utiliser le fait que $C_n + \mathrm{i}\,S_n = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$).

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad , \qquad \sin(3\theta) = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta .$$

2. Calculer de même $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et de leurs puissances.
3. En posant $\cos\theta = x/r$ avec $r > 0$ dans la première formule de la question 1, déterminer toutes les valeurs de $r \in \mathbb{R}_+^*$ et de $\theta \in [0, 2\pi[$ telles que x soit solution de

$$x^3 - 3x + 1 = 0 . \tag{1}$$

En déduire les solutions de l'équation du troisième degré (1).

Exercice 19.

1. Linéariser $\sin^4\theta\cos^5\theta$ en une somme de sinus et cosinus (on pourra se servir de la formule $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ pour simplifier les calculs). Calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta \,\mathrm{d}\theta .$$

2. De même, calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^5\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta .$$

Exercice 20. Dans le plan complexe on considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le triangle ABC soit équilatéral.

1. Écrire la relation entre a, b, c et l'angle θ lorsque C est l'image de B par une rotation de centre A et d'angle θ.
2. On note $\mathrm{j} = e^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$. Montrer que $e^{\mathrm{i}\,\pi/3} = -\mathrm{j}^2$ et $e^{-\mathrm{i}\,\pi/3} = -\mathrm{j}$.
3. À l'aide des questions précédentes, montrer que
$$ABC \text{ est équilatéral} \quad \Leftrightarrow \quad a + b\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{j}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + b\,\mathrm{j}^2 + c\,\mathrm{j} = 0\,.$$

Exercice 21. Soit $M(z)$ un point du plan complexe d'affixe z. Donner les affixes des images de M par la symétrie d'axe (Ox), la symétrie d'axe (Oy), la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation de centre $A(z = 1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 22.
1. Soit A un point du plan complexe d'affixe $a = |a|e^{\mathrm{i}\,\theta}$, avec $a \neq 0$. Vérifier que la symétrie $\mathcal{S}_{(OA)}$ d'axe (OA) s'obtient en appliquant successivement une rotation $\mathcal{R}_{O,-\theta}$ de centre O et d'angle $-\theta$, une symétrie $\mathcal{S}_{(Ox)}$ d'axe (Ox), et une rotation $\mathcal{R}_{O,\theta}$ de centre O et d'angle θ (autrement dit, l'on a $\mathcal{S}_{(OA)} = \mathcal{R}_{O,\theta} \circ \mathcal{S}_{(Ox)} \circ \mathcal{R}_{O,-\theta}$).
2. Donner les affixes des images de $M(z)$ obtenues en appliquant successivement $\mathcal{R}_{O,-\theta}$, puis $\mathcal{S}_{(Ox)}$, puis $\mathcal{R}_{O,\theta}$. En déduire l'affixe de l'image de $M(z)$ par la symétrie $\mathcal{S}_{(OA)}$.

Exercice 23. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

(a) $\dfrac{1-z}{1-\mathrm{i}\,z}$ est un nombre imaginaire pur;

(b) 0, z et z^4 sont alignés;

(c) z, $\mathrm{i}\,z$ et i forment un triangle équilatéral;

(d) z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en z;

(e) z, $1/z$ et $1-z$ sont sur un même cercle de centre O.

Tracez les solutions dans le plan complexe.

Exercice 24. Donner les équations en coordonnées polaires de :

- la droite d'équation cartésienne $y = \sqrt{3}x$;
- le cercle de centre l'origine O et de rayon R;
- la droite d'équation cartésienne $x = 1$.
- la droite d'équation cartésienne $x = -1$.

Exercice 25. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'' - 4y' + 13y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{lcl} y'' - 5y' & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'' - 2y' + y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 \end{array}\right.$$