2015-2016 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Feuille de TD 3 : primitives et intégrales définies

Exercice 1. Calculer l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des absisses, et les droites $x = 1$ et $x = 5$ pour la fonction $f(x) = 1 + x + 3x^2$.

Exercice 2. Donner les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1 : t \mapsto \cos(\pi t + \frac{\pi}{8}) \;,\quad f_2 : x \mapsto \frac{6x+7}{3x^2+7x-13} \;,\quad f_3 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^2} \;,\quad f_4 : x \mapsto (x+2)\sqrt{x+2}$$
$$f_5 : t \mapsto 5^t \;,\quad f_6 : \theta \mapsto \sin^2\theta\cos\theta \;,\quad f_7 : \theta \mapsto \frac{1}{\cos^2\theta} \;,\quad f_8 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

Exercice 3. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses, et pourqoi ?

1. $\displaystyle\int_0^\pi \theta\,\sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\sin(2\theta)\Big]_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos(2\theta)\mathrm{d}\theta$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \theta\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \theta^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi - \int_0^\pi \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{2\sqrt{1-u^2}}$

Exercice 4. Qu'est-ce qui est faux dans le calcul ci-dessous ?

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int x\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[x\big(-\frac{1}{x}\big)\Big] - \int 1\times\big(-\frac{1}{x}\big)\mathrm{d}x = -1 + \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Exercice 5. Déterminer une primitive de $f(x) = \arctan(x)$ en écrivant

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } u(t) = t \text{ et } v(t) = f(t),$$

et en effectuant une intégration par parties.
Même question pour $f(x) = \arcsin(x)$ et $f(x) = \arccos(x)$, $x \in [-1, 1]$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

$$\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad \int_0^\pi \theta^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \quad , \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Exercice 7. Déterminer des primitives des fonctions suivantes grâce à un changement de variables.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{25-x^2}} \quad , \quad g(t)=\frac{e^t}{3e^{2t}+27} \quad , \quad h(x)=\frac{1}{x((\ln x)^2+4)} \quad , \quad k(t)=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{(\mathrm{e}^{4t}+2\mathrm{e}^{2t}+1)^2}\ .$$

Exercice 8. En effectuant le changement de variable $x=\cos\theta$ puis en utilisant les relations $\cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1 = 1-2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 9. Soit $0<a<x<1$. Déterminer l'intégrale

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}$$

en effectuant le changement de variable $y=1/t$ (rappel : $\mathrm{argch}'(y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$). Vérifier votre résultat en dérivant par rapport à x.

Exercice 10. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{1+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1-u^2)} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2}$$

et calculer les deux intégrales du membre de droite.

Exercice 11. On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

où n est un entier naturel.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $I_n = -1+nI_{n-1}$.
3. En déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

Exercice 12. On considère l'intégrale

$$J_n = \int_0^{2\pi} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta\ ,$$

où n est un entier naturel.

1. Montrer que $J_n = 0$ si n est impair.

2. Montrer à l'aide d'une intégation par parties que pour tout entier $n \geq 2$,

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \ .$$

3. Calculer J_0 et en déduire les valeurs de J_2, J_4 et J_6.

4. Montrer l'identité suivante pour tout n pair, $n \geq 2$:

$$n(n-2)(n-4)\cdots 2 = 2^{\frac{n}{2}}(n/2)!$$

5. Montrer que pour tout n pair, $n \geq 2$, on a

$$J_n = \frac{2\pi}{2^n} \frac{n!}{[(n/2)!]^2} \ .$$

Exercice 13. Pour tout $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I(\frac{1}{x}) = I(x)$.

2. Exprimer $I(x)$ à l'aide de l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}$.

3. Trouver trois nombres réels A, B et C tels que

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2+1} \quad , \quad \forall \ t \neq 0 \ .$$

4. En déduire la valeur de $J(x)$ puis celle de $I(x)$ pour tout $x > 0$.
   Vérifier vos résultats en dérivant.

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y''(t) + 4y(t) & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{ccc} y''(t) - 9y(t) & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right. \ .$$