2015-2016 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

**Feuille de TD 2 : continuité, dérivées, fonctions exponentielle et logarithme, fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques**

---

**Exercice 1.**

1. En utilisant la définition d'une fonction continue et en "coupant les $\varepsilon$ en deux", montrer que la somme de deux fonctions continues en $x_0$ est continue en $x_0$.
2. De même, montrer que si $f$ est continue en $x_0$ et $g$ est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en $x_0$.

**Exercice 2.** Donner les domaines sur lesquelles les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

$f_1 : x \mapsto (2x^2+3)^5(1-2x)^3$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{3x^2+x+7}{x^2-1}$

$f_3 : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

$f_4 : \theta \mapsto \sin^3(\theta)\cos(2\theta)$

$f_5 : \theta \mapsto \tan^3(3\theta)$

$f_6 : u \mapsto u\ln u + (1-u)\ln(1-u)$

$f_7 : x \mapsto 3^{x^2-1}$

$f_8 : x \mapsto |x|$

**Exercice 3.** Donner les tableaux de variation (intervalles sur lesquels les fonctions sont croissantes ou décroisantes) des fonctions $f_2$ à $f_8$ de l'exercice précédent.

**Exercice 4.** Donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f : x \mapsto \exp(-2\mathrm{e}^{-3x})$ au point d'absisse $x_0 = \frac{\ln 2}{3}$.

**Exercice 5.** Soit $a$ et $b$ deux réels non nuls. Montrer que

$$\exp\left(\frac{a+b}{ab}\right) = \exp\left(\frac{1}{a}\right)\exp\left(\frac{1}{b}\right) .$$

**Exercice 6.** Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

$$\ln_2(64) \quad , \quad \ln_3\left(\frac{1}{9}\right) \quad , \quad \ln(512) \quad , \quad 2^{\frac{3}{2}} \quad , \quad 27^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{144^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} - 1024^{\frac{1}{10}} \quad , \quad \mathrm{e}^{2\ln 3} \quad , \quad \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad , \quad \mathrm{e}^{2\ln 7+1} .$$

**Exercice 7.** Résoudre les équations suivantes :

$$\ln_3(x) = 2 \ , \ \sqrt{8^x} = \frac{1}{4} \ , \ \ln(x-2) + \ln(x-3) = 2\ln(x) \ , \ 81^{2x-1} + 80 \times 9^{4x} + 1 = 81^{2x+1} \ .$$

**Exercice 8.** Pour quelles valeurs de $x$ les expressions suivantes

$$\sin(\arccos(x)) \quad , \quad \cos(\arcsin(x)) \quad , \quad \tan(\arcsin(x)) \quad , \quad \tan(\arccos(x))$$

sont-elles définies ? En utilisant l'identité $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, montrer que ces expressions sont des fonctions simples de $x$ que vous déterminerez.

**Exercice 9.** Soit $\theta \in [0, \pi/2[$. Simplifier l'écriture de :

$$\arccos(1 - 2\sin^2\theta) \qquad \text{et} \qquad \arcsin\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \ .$$

**Exercice 10.**

1. Soit $\theta \in ]0, \pi/2[$. Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$.
2. En déduire que si $x > 0$, alors
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$
3. Déduire de la question précédente que si $x < 0$, alors
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \ .$$
4. Prouver les deux égalités des questions 2 et 3 d'une autre manière, en dérivant le membre de gauche et en le déterminant pour une valeur de $x$ bien choisie.

**Exercice 11.**

1. (a) Montrer que sinh admet une fonction réciproque, notée argsh. Déterminer son domaine de définition (on admettra que $\sinh(a) \to \infty$ quand $a \to \infty$).
   (b) Montrer que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
   Donner le tableau de variation de argsh et tracer son graphe.
   (c) En posant $e^x = u$ et en résolvant une équation du second degré en $u$, montrer que $\operatorname{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$.
   Retrouver l'expression de la dérivée de argsh à partir de cette expression.
2. (a) Montrer que cosh restreinte à $[0, \infty[$ admet une fonction réciproque, notée argch. Déterminer son domaine de définition (on admettra que $\cosh(a) \to \infty$ quand $a \to \infty$).
   (b) Montrer que argch est dérivable sur $]1, \infty[$ et déterminer sa dérivée.
   Donner le tableau de variation de argch et tracer son graphe.
   (c) Montrer comme à la question 1(c) que $\operatorname{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \quad \forall\, y \in [1, \infty[$.
   Retrouver l'expression de la dérivée de argch à partir de cette expression.
3. (a) Montrer que tanh admet une fonction réciproque, notée argth. Déterminer son domaine de définition (on admettra que $\tanh(a) \to 1$ quand $a \to \infty$).
   (b) Montrer que argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et déterminer sa dérivée.
   Donner le tableau de variation de argth et tracer son graphe.
   (c) Montrer que comme à la question 1(c) que $\operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \quad \forall\, y \in ]-1, 1[$.
   Retrouver l'expression de la dérivée de argth à partir de cette expression.