2014-2015 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Examen du 22 juin 2015, seconde session, durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.
Vous justifierez soigneusement toutes vos réponses.

Questions de cours :

1. Donner des primitives des fonctions $\theta \mapsto \tan\theta$, $x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ et $t \mapsto t - \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
2. Soit f une fonction réelle de domaine de définition $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Donner la définition de l'image réciproque $f^{-1}(I)$ de I par f.
3. Une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est-elle bornée? Justifiez votre réponse.
4. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
5. Donner l'affixe $z' \in \mathbb{C}$ de l'image $M'(z')$ d'un point $M(z)$ du plan complexe par une rotation d'angle θ autour de l'origine O.

Exercice 1. 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k}}{5^{k-1}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2(k+2)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 2. 1. Déterminer tous les nombres complexes z tels que

(a) $z^3 = -1$

(b) $z^4 = 8\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$.

2. Déterminer les modules et arguments des nombres complexes suivants:

$$(1-\mathrm{i})^5 \quad , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \quad , \quad \exp\left(\frac{5-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right) .$$

Exercice 3. Exprimez $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et de leurs puissances.

Exercice 4. 1. Donner le domaine de définition de la fonction arcsin puis déterminer sa dérivée en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque (vous justifierez votre réponse).

2. En effectuant le changement de variable $u = 1/t$, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} .$$

Exercice 5. Pour tout entier positif p, on considère l'intégrale

$$I_p = \int_0^\pi (\sin\theta)^{2p}\,\mathrm{d}\theta\ .$$

1. En utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, montrer que pour tout entier $p \geq 1$,

$$I_p = I_{p-1} - \int_0^\pi \cos^2\theta(\sin\theta)^{2p-2}\,\mathrm{d}\theta\ .$$

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties (intégrer $u(\theta) = \cos\theta(\sin\theta)^{2p-2}$ et dériver $v(\theta) = \cos\theta$) que pour tout entier $p \geq 1$,

$$\int_0^\pi \cos^2\theta(\sin\theta)^{2p-2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{I_p}{2p-1}\ .$$

3. Déduire des questions précédentes que pour tout entier $p \geq 1$,

$$I_p = \frac{2p-1}{2p} I_{p-1}\ .$$

4. Déterminer les valeurs de I_0, I_1, I_2, et I_3.

5. On pose pour tout entier $p \geq 1$

$$A_p = \prod_{k=0}^{p-1} \big(2p-2k-1\big) \quad , \quad B_p = \prod_{l=0}^{p-1} \big(2p-2l\big)\ .$$

   Montrer que $A_pB_p = (2p)!$ puis en déduire que $A_p = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

6. Déterminer les valeurs de I_p pour tout entier $p \geq 0$.