2013-2014 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

**Examen du 20 décembre 2013, durée : 3 heures**

---

*Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.*
*Vous justifierez soigneusement toutes vos réponses.*

**Questions de cours :**

1. Donner les primitives des fonctions $t \mapsto 2^t$, $t \mapsto \mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t+1)^{\frac{5}{2}}$ et $\theta \mapsto \dfrac{\sin\theta}{(\cos\theta)^4}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $r$ soit une racine double du polynôme $\mathcal{P}(X)$.
4. Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes, $z_2 \neq 0$. Exprimer le module et l'argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$ en fonction de $|z_1|$, $|z_2|$, $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$.

**Exercice 1.** 1. Tracer l'allure du graphe de la fonction exponentielle. Déterminer l'équation de la tangente à ce graphe au point $M_0(x_0, \mathrm{e}^{x_0})$. Montrer que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(x_0 - 1, 0)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\alpha \neq 0$. On cherche toutes les fonctions $f$ ayant la propriété suivante : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la tangente au graphe de $f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(x_0 - \alpha, 0)$.
   (a) Montrer que si $f$ a la propriété ci-dessus, alors elle satisfait à l'équation différentielle $f' - (1/\alpha)f = 0$.
   (b) Déterminer toutes les fonctions $f$ possédant cette propriété.

**Exercice 2.** Déterminer les modules et arguments des nombres complexes suivants :

$$\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} \quad , \quad (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^4 \quad , \quad \exp\Big(\frac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\Big) \quad , \quad \sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

**Exercice 3.** 1. Trouver les racines réelles et factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 - X^3 + X^2 - X$.

2. Décomposer en élements simples sur $\mathbb{R}$ la fonction fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x^4-x^3+x^2-x} \; .$$

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 1$.

**Exercice 4.**

1. La fonction $g : \theta \in \mathbb{R} \mapsto (\cos\theta)^3$ est-elle paire/impaire? Est-elle périodique? (justifiez vos réponses).
2. Déterminer la primitive de $g$ s'annulant en $\theta = 0$ (vous pourrez pour cela linéariser $(\cos\theta)^3$ en une somme de sinus et de cosinus).
3. En utilisant la question précédente et une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\,(\cos\theta)^3 \mathrm{d}\theta\ .$$

**Exercice 5.**

1. Montrer que si $n$ et $k$ sont des entiers tels que $0 \leq k \leq n$, alors
$$k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}\ .$$
2. En déduire que pour tout entier $n > 0$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n\,2^{n-1}\ .$$