2015-2016 **MAT11p** Université Grenoble Alpes
Centre Drôme-Ardèche

Examen du 15 décembre 2015, durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.

Autour du cours :

1. Déterminer la valeur $\tanh'(0)$ de la dérivée de la fonction tanh (tangente hyperbolique) en $x = 0$. Tracer sur un même dessin :
   (a) l'allure du graphe de tanh;
   (b) la tangente à ce graphe passant par l'origine O;
   (c) l'allure du graphe de la fonction réciproque de tanh

   (il n'est pas nécessaire de justifier vos graphes par des tableaux de variation).

2. Donner la solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

3. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f(\theta) = \sin\theta\cos^2\theta \quad , \quad g(\theta) = \tan\theta \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{t^2}\exp\left(\frac{1}{t}\right) .$$

4. Soit z un nombre complexe non nul. Exprimer le module et l'argument du complexe conjugué $\overline{z}$ de z en fonction de $|z|$ et de $\mathrm{Arg}(z)$.
   Étant donné un point M d'affixe z dans le plan complexe, représenter le point d'affixe $\overline{z}$.
   Interpréter graphiquement les relations entre $|\overline{z}|$ et $|z|$ et entre $\mathrm{Arg}(\overline{z})$ et $\mathrm{Arg}(z)$.

Exercice 1. 1. Simplifier les expressions suivantes

$$16^{\frac{3}{4}} \quad , \quad \mathrm{e}^{2\ln 3 + 3\ln 2} \quad , \quad \tan(\arccos u) .$$

2. Donner le domaine de définition de la fonction $g : u \mapsto \tan(\arccos u)$.

Exercice 2. Soit $r > 0$ un nombre réel fixé. On considère la fonction :

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} .$$

1. Donner le (plus grand) domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et donner son domaine de définition.
3. La fonction f est-elle paire/impaire? Donner son tableau de variation.
4. Montrer que le graphe de f est le demi-cercle de rayon r centré en l'origine O et situé dans le demi-plan supérieur au dessus de l'axe (Ox).
5. En interprétant $A = \displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ comme une aire, déterminer la valeur de A.

6. Montrer à l'aide du changement de variables $x = r\cos\theta$ que

$$A = r^2 \int_0^\pi \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \ .$$

En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 3. On considère les intégrales

$$I = \int_0^\pi \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \quad , \quad J = \int_0^\pi \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \ .$$

1. Montrer en effectuant une intégration par parties que $I = J$.
2. Montrer que $I + J = \pi$.
3. En déduire la valeur de I et de J. Comparer votre résultat avec celui de l'exercice 2.

Exercice 4. Déterminer les modules et arguments des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\cos(\frac{\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{10}) + \mathrm{i}\cos(\frac{\pi}{10})} \quad , \quad z_2 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}} \quad , \quad z_3 = \exp\Big(\frac{\mathrm{i}\pi}{1+\mathrm{i}}\Big) \ .$$

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes :

$$R = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{3^m} \quad , \quad S = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 3^m \quad , \quad T = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \mathrm{i}^m$$

Exercice 6. Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} j \quad , \quad C_n = \sum_{j=1}^{n} j^2 \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{j=1}^{n} (j+1)^3 - \sum_{j=1}^{n} j^3 \ .$$

1. Montrer que $D_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k^3 - \sum_{j=1}^{n} j^3$, en déduire que $D_n = (n+1)^3 - 1$.
2. Montrer que $D_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (3j^2 + 3j + 1)$.
3. Déduire des deux questions précédentes que $C_n + S_n = \dfrac{(n+1)^3 - n - 1}{3}$.
4. Donner la valeur de S_n en fonction de n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$