2014-2015 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Examen du 19 décembre 2014, durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.

Autour du cours :

1. Rappeler la définition de l'injectivité d'une fonction réelle f.
2. Tracer l'allure des graphes de la fonction sinh (sinus hyperbolique) et de sa fonction réciproque argsh sur un même dessin, ainsi que les tangentes à ces graphes à l'origine O (il n'est pas nécessaire de justifier vos graphes par des tableaux de variation).
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Donner les domaines de définition de la fonction réciproque f^{-1} de f et de sa dérivée $(f^{-1})'$, et rappeler la formule donnant $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} et f'.
4. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :
$$f(x) = \frac{3}{x^2} \quad , \quad g(t) = (t^3+1)\mathrm{e}^{t^4+4t+1} \quad \text{et} \quad h(\theta) = \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 2} .$$
5. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Exprimer le module et l'argument de $z_1 z_2$ en fonction de $|z_1|$, $|z_2|$, $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$.
6. Donner les affixes $z' \in \mathbb{C}$ des images $M'(z')$ de $M(z)$ par la symétrie d'axe (Ox), la rotation autour de l'origine d'angle θ, et la translation de vecteur $\vec{OA}$ avec A d'affixe $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 1. 1. Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :
$$z_1 = \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \quad , \quad z_2 = \mathrm{e}^{\pi(1+\mathrm{i})^2} \quad , \quad z_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} .$$

2. Déterminer les modules et arguments de z_1, z_2 et z_3.

Exercice 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{10} \frac{1}{2^{j+1}} = 1 - \frac{1}{2^{11}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k}(-3)^{-k} = \left(\frac{-1}{3}\right)^n$
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$
4. $\displaystyle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta k} = 2^n \cos^n\theta.$

Exercice 3. 1. Montrer en utilisant les formules d'Euler que pour tout réel θ,

$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4} .$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta$.

3. Montrer à l'aide du changement de variables $\theta' = \pi - \theta$ que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta = -I$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 4. On considère l'intégrale

$$J = \int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x .$$

1. En effectuant le changement de variables $t = \sqrt{x}$, montrer que

$$J = 2\int_1^2 t\,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t .$$

2. En déduire la valeur de J en intégrant par parties dans la dernière intégrale.

Exercice 5. 1. Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - y & = & 0 \\ y(1) & = & 1 \\ y'(1) & = & 1 \end{array} \right.$$

(attention au temps initial $t_0 = 1$ dans les conditions initiales!). Utilisez les formules $\cosh(u) = (\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})/2$ et $\sinh(u) = (\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u})/2$ pour simplifier éventuellement l'expression de la solution, que l'on notera y_0.

2. Tracer l'allure du graphe de y_0.

3. Montrer que y_0 est une fonction injective définie sur $\mathbb{R}$. En déduire que y_0 admet une fonction réciproque y_0^{-1} que vous déterminerez. Quel est le domaine de définition de y_0^{-1} ?

4. Montrer que pour tout réel γ, y_0 est solution de l'équation différentielle

$$y'' - (1+\gamma)y' + \gamma y = 0 .$$

5. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 1$. Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - (1+\gamma)y' + \gamma y = 0 & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \\ y'(1) & = & 1 \end{array} \right. .$$