Master 2R *Mathématiques fondamentales*, “Théorie spectrale et opérateurs aléatoires”, 2009-2010
Université Joseph Fourier

Devoir à la maison.

Le but principal de ce qui suit est de montrer le résultat ci-dessous énoncé en cours :

Soit T une matrice de Jacobi sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Alors le spectre $\sigma(T)$ de T est donné par :

$$\sigma(T) = \overline{\big\{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ T\varphi = \lambda\,\varphi \text{ admet une solution } \varphi \neq 0 \text{ bornée polynomialement}\big\}}.$$

On a démontré en cours grâce à l'inégalité de Combes-Thomas pour la fonction de Green que si $T\varphi = \lambda\,\varphi$ admet une solution $\varphi \neq 0$ bornée polynomialement, alors $\lambda \in \sigma(T)$. Il s'agit ici de prouver la réciproque.

PARTIE I : Préliminaires

I.0. **Notations :**

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$: ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$
$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$: produit scalaire (linéaire à droite) sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$
$\|T\|$: norme (d'opérateur) de l'opérateur linéaire $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
$P_\Delta(H)$: projecteur spectral de l'opérateur auto-adjoint H sur le borélien $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$1_\Delta(\lambda)$: fonction indicatrice sur $\Delta \subset \mathbb{R}$ ($1_\Delta(\lambda) = 1$ si $\lambda \in \Delta$ et 0 sinon)
$\operatorname{ran} T$: image de T
$\operatorname{supp}\rho$: support de la mesure ρ
$\text{s-}\lim_{n\to\infty} T_n$: limite forte de la suite d'opérateurs $T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ quand $n \to \infty$

I.1. On utilise dans la suite les notions suivantes (qu'il faudra au besoin revoir [1]) :

- **opérateurs traçables;**
- **opérateurs positifs;**
- **théorème de Hilbert-Schmidt** pour les opérateurs compacts;
- généralisation aux mesures complexes du **théorème de Radon-Nykodym** vu en cours.

I.2. Démontrer le résultat suivant de type Radon-Nykodym pour les opérateurs traçables :

Théorème 1 (B. Simon 1982): *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit $\{A(\Delta)\}_{\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ une famille d'opérateurs positifs traçables sur $\mathcal{H}$, indexés par les boréliens $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, satisfaisant la propriété de σ-additivité suivante : si $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite de boréliens disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$A\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\Big) = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A(\Delta_n)\ .$$

Alors il existe une mesure positive finie ρ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et une fonction $a : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto a(\lambda)$ mesurable définie ρ-presque partout et à valeurs dans les opérateurs positifs traçables telle que :

(i) $A(\Delta) = \int_\Delta \mathrm{d}\rho(\lambda)\, a(\lambda)$ *au sens faible pour tout borélien Δ*
(c'est-à-dire, $\langle\psi, A(\Delta)\psi\rangle = \int_\Delta \mathrm{d}\rho(\lambda)\,\langle\psi, a(\lambda)\psi\rangle\ \ \forall\, \psi \in \mathcal{H},\ \ \forall\, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

(ii) $\operatorname{tr}\big(a(\lambda)\big) = 1$ *pour ρ-presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Les deux conditions (i) et (ii) fixent ρ et a.

[1] cf. par exemple le livre de M. Reed et B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics vol. 1*, sections VI.4, VI.5 et VI.6., et le livre de W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, chap. 6. pour le théorème de Radon-Nykodym.

Indications pour démontrer le théorème 1 :

I.2.1. On définit $\rho : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(A(\Delta))$. Montrer que ρ est une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, il existe une fonction $a_{nm} \in L^1(\mathbb{R}, \rho)$ telle que :

$$\langle e_n, A(\Delta) e_m \rangle = \int_\Delta \mathrm{d}\rho(\lambda)\, a_{nm}(\lambda) \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) .$$

I.2.2. Pour tout $\psi \in \mathcal{D} = \Big\{ \psi = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n \,;\, N \in \mathbb{N}^\star, c_n \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q} \ \forall\, n = 1, \cdots, N \Big\} \subset \mathcal{H}$, on pose

$$a(\lambda)\psi = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(\lambda) \langle e_n, \psi \rangle\, e_m .$$

Montrer que pour ρ-presque tout λ on a $0 \le \langle \psi, a(\lambda)\psi \rangle \le \|\psi\|^2 \ \forall\, \psi \in \mathcal{D}$.

I.2.3. Montrer que $a : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ est ρ-presque sûrement borné. En déduire que $a(\lambda)$ peut être prolongé par continuité en un opérateur borné positif sur $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}}$, qui satisfait (i) et (ii).

I.3. Soit H un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. On dit qu'une mesure positive ρ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est dans la classe spectrale de* H si pour tout $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\rho(\Delta) = 0 \Leftrightarrow P_\Delta(H) = 0$. Montrer :

Proposition : *Si ρ est dans la classe spectrale de H, alors $\sigma(H) = \operatorname{supp} \rho$.*

PARTIE II : un théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints sur $\ell^d(\mathbb{Z}^d)$.

On se place sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ avec $d = 1, 2, \cdots$. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}$ (positif ou négatif), on considère les “espaces à poids”

$$\ell^2_\nu(\mathbb{Z}^d) = \Big\{ \psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d} \,;\, \|\psi\|_\nu \equiv \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (1+|x|^2)^\nu |\psi(x)|^2 < \infty \Big\} \tag{1}$$

munis des produits scalaires $\langle \phi, \psi \rangle_\nu = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (1+|x|^2)^\nu \overline{\phi(x)} \psi(x)$. Pour $\nu \ge 0$ on a $\ell^2_\nu(\mathbb{Z}^d) \subset \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Soit $(1+X^2)^{-\nu/2}$ l'opérateur unitaire $\ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2_\nu(\mathbb{Z}^d)$ défini par

$$\big[(1+X^2)^{-\frac{\nu}{2}}\psi\big](x) = (1+|x|^2)^{-\frac{\nu}{2}}\, \psi(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}^d \ , \ \forall\, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) . \tag{2}$$

On va démontrer dans la question II.2 le :

Théorème 2 (B. Simon 1982): *Soit H un opérateur auto-adjoint borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Soit $\delta > d/2$. On suppose que $\|(1+X^2)^{\delta/2} H (1+X^2)^{-\delta/2}\| < \infty$. Alors il existe une mesure ρ positive finie dans la classe spectrale de H et une famille $\{\Delta_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ de boréliens disjoints tels que*

1. $\rho(\mathbb{R} \setminus \cup_{n=1}^\infty \Delta_n \cup \Delta_\infty) = 0$
2. *pour tout $\lambda \in \Delta_n$, H admet n vecteurs propres généralisés $\varphi_1^\lambda, \cdots, \varphi_n^\lambda$ satisfaisant :*
   - *(i)* $[(H-\lambda)\varphi_j^\lambda](x) = 0$ *pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout $j = 1, \cdots, n$*
   - *(ii)* $\|\varphi_j^\lambda\|_{-\delta} \le 1$; *en particulier,* $|\varphi_j^\lambda(x)| \le (1+|x|^2)^{\delta/2}$ *pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout $j = 1, \cdots, n$*
   - *(iii)* $\varphi_1^\lambda, \cdots, \varphi_n^\lambda$ *sont linéairement indépendants.*

On démontrera “dans la foulée” à la question II.3. le théorème spectral suivant :

Théorème 3 (B. Simon 1982): *Sous les hypothèses et notations du théorème 2, soit* $n \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ *et* $\mathrm{d}\rho_n = 1_{\Delta_n}\mathrm{d}\rho$. *Pour tout* $\lambda \in \Delta_n$, $j = 1, \cdots, n$ *et* $\psi \in \ell^2_\delta(\mathbb{Z}^d)$, *on définit :*

$$(U\psi)_j(\lambda) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_j^\lambda(x)}\, \psi(x) \; . \tag{3}$$

Alors U *s'étend par continuité en un opérateur unitaire* $\ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \mathcal{K} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n, \mathrm{d}\rho_n)$. *En particulier,* $\|U\psi\|^2_{\mathcal{K}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\rho_n(\lambda) \sum_{j=1}^{n} |(U\psi)_j(\lambda)|^2 = \|\psi\|^2$ *pour tout* $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. *De plus,* $(UH\psi)_j(\lambda) = \lambda(U\psi)_j(\lambda)$ *et, si* g *est une fonction borélienne bornée,*

$$[U(g(H)\psi)]_j(\lambda) = g(\lambda)(U\psi)_j(\lambda) \quad \forall\, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \; , \; \forall\; \lambda \in \Delta_n \; , \; \forall\; j = 1, \cdots, n \; . \tag{4}$$

II.1. Montrer que le théorème 2 a pour corollaire :

Corollaire : *Sous les hypothèses du théorème 2,*

$$\sigma(H) \subset \overline{\{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; H\varphi = \lambda\,\varphi \text{ admet une solution } \varphi \neq 0 \text{ bornée polynomialement}\}}.$$

II.2. **Indications pour démontrer le théorème 2 :**

II.2.1. Montrer que la famille d'opérateurs sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$

$$A(\Delta) = (1 + X^2)^{-\frac{\delta}{2}} P_\Delta(H)(1 + X^2)^{-\frac{\delta}{2}} \quad , \; \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{5}$$

satisfait les hypothèses du théorème 1. Soit $\rho : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A(\Delta))$ la mesure positive et $a : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto a(\lambda)$ la fonction associée à (5) dans ce théorème. Montrer que ρ est dans la classe spectrale de H.

II.2.2. Par le théorème de Hilbert-Schmidt, pour ρ-presque tout λ il existe $N(\lambda) \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$ et une famille de vecteurs orthogonaux $\{f_j^\lambda\}_{j=1}^{N(\lambda)}$ de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{N(\lambda)} \|f_j^\lambda\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad a(\lambda)\psi = \sum_{j=1}^{N(\lambda)} \langle f_j^\lambda, \psi \rangle f_j^\lambda \quad \text{pour tout } \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d). \tag{6}$$

II.2.3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star \cup \{\infty\}$. On pose :

$$\Delta_n = \{\lambda \in B \, ; \, N(\lambda) = n\} \tag{7}$$

où le borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ satisfait $\rho(\mathbb{R} \setminus B) = 0$ et est choisi de telle sorte que $a(\lambda)$ soit bien défini pour tout $\lambda \in B$. Pour tout $\lambda \in \Delta_n$ et tout $j = 1, \cdots, n$, soit :

$$\varphi_j^\lambda = (1 + X^2)^{\frac{\delta}{2}} f_j^\lambda \; \in \; \ell^2_{-\delta}(\mathbb{Z}^d) \; . \tag{8}$$

Montrer que $\cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \cup \Delta_\infty$ a un complémentaire de ρ-mesure nulle et que $\{\varphi_j^\lambda\}_{j=1}^n$ satisfait (ii) et (iii).

II.2.4. Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$, considérer les fonctions mesurables

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto F^\lambda(x,y) = \sum_{j=1}^{N(\lambda)} \varphi_j^\lambda(x)\overline{\varphi_j^\lambda(y)} = (1+|x|^2)^{\frac{\delta}{2}} \langle e_x, a(\lambda) e_y \rangle (1+|y|^2)^{\frac{\delta}{2}} \ , \tag{9}$$

où $\{e_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ désigne la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Montrer que pour toute fonction mesurable bornée g et pour tout $\psi, \phi \in \ell^2_\delta(\mathbb{Z}^d)$, on a

$$\langle \phi, g(H)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\rho(\lambda)\, g(\lambda) \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} \overline{\phi(x)} F^\lambda(x,y)\psi(y) \ . \tag{10}$$

(on prouvera d'abord (10) pour les fonctions indicatrices puis pour les fonctions mesurables bornées g par linéarité et par la procédure habituelle de passage à la limite ponctuelle).

II.2.5. Montrer que $H : \ell^2_\delta(\mathbb{Z}^d) \mapsto \ell^2_\delta(\mathbb{Z}^d)$. En appliquant (10) successivement à $g(\lambda) = \lambda\, 1_\Delta(\lambda)$ où $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un borélien borné puis à $g(\lambda) = 1_\Delta(\lambda)$, montrer que si $y \in \mathbb{Z}^d$ est fixé, alors

$$\int_\Delta \mathrm{d}\rho(\lambda)\, \langle \phi, (H-\lambda) F^\lambda(\cdot, y)\rangle = 0 \ ,$$

où $F^\lambda(\cdot, y)$ désigne le vecteur $(F^\lambda(x,y))_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2_{-\delta}(\mathbb{Z}^d)$. En déduire qu'il existe $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\rho(\mathbb{R} \setminus B') = 0$ et $\langle e_x, (H-\lambda)F^\lambda(\cdot, y)\rangle = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{Z}^d, \ \forall\, \lambda \in B'$.
Dans la suite, on redéfinit les ensembles boréliens (7) par $\Delta_n \to \Delta_n \cap B'$.

II.2.6. Montrer que pour tout $\lambda \in \Delta_n$ et tout $j = 1, \cdots, n$,

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} F^\lambda(\cdot, y)(1+|y|^2)^{-\delta} \varphi_j^\lambda(y) = \|f_j^\lambda\|^2 \varphi_j^\lambda \ .$$

Déduire (i) de ce qui précède.

II.3. Indications pour démontrer le théorème 3 :

II.3.1. En utilisant (10), montrer que $\|U\psi\|_{\mathcal{K}} = \|\psi\|$ pour tout $\psi \in \ell^2_\delta(\mathbb{Z}^d)$. En déduire que U peut s'étendre en une isométrie $\ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \mathcal{K}$.

II.3.2. Montrer que l'identité (4) est vraie si $g(\lambda)$ est une fonction polynôme (et donc en particulier pour $g(\lambda) = \lambda$), puis pour des fonctions g mesurables bornées.

II.3.3. Soit k un vecteur de $\mathcal{K}$ appartenant à $(\operatorname{ran} U)^\perp$. On pose :

$$l^\lambda(x) = \sum_{j=1}^{N(\lambda)} k_j(\lambda)\, \overline{\varphi_j^\lambda(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}^d \ . \tag{11}$$

Montrer que le membre de droite est bien défini et que l'on a $l^\lambda(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et ρ-presque tout λ (on pourra utiliser l'identité (4)). En déduire que $k = 0$ et conclure que $U : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \mathcal{K}$ est surjective et donc unitaire.

II.4. Quel est le lien entre les mesures spectrales μ_n apparaissant dans le théorème spectral vu en cours (version "opérateur de multiplication"), la mesure ρ et les ensembles Δ_n? Montrer que les éléments $\lambda \in \Delta_n$ du spectre de H ont pour multiplicité n et que le théorème 3 permet de retrouver dans le cas $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ le théorème VII.6 du livre de M. Reed et B. Simon (*Methods of Modern Mathematical Physics vol. 1*), unicité mise à part. Que peut-on dire de la multiplicité des matrices de Jacobi T sur $\ell(\mathbb{Z})$?