M1 — Université Grenoble-Alpes
Analyse fonctionnelle — 2015/2016

Partiel

Durée : 2h

Dans tous les exercices, les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ ($p \in [1,\infty]$) sont munis de leur normes usuelles. Un élément $(u_n) \in \ell^q(\mathbb{N})$ (où $q = 1/(1-1/p)$ avec le prolongement usuel pour $p = 1, \infty$) définit une forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbb{N})$ par

$$(v_n) \in \ell^p(\mathbb{N}) \ \longmapsto\ \langle v_n | u_n \rangle_{p,q} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n \ . \tag{1}$$

On admettra l'inégalité de Hölder ainsi que le fait que $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\ell^q(\mathbb{N})$ sont duaux l'un de l'autre dès que p et q sont différents de 1 et $+\infty$.

Exercice 1 : Stricte convexité

Soit X un espace de Banach et soit X' son dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$. On dit que X' est strictement convexe si

$$\forall f, g \in X' \text{ avec } |||f||| = |||g||| = 1 \ , \ \forall \theta \in \,]0,1[\ , \quad |||\theta f + (1-\theta) g||| < 1 \ . \tag{2}$$

On admettra la conséquence suivante du théorème de Hahn-Banach : pour tout $x \in X$ avec $\|x\| = 1$, il existe une forme linéaire continue $f \in X'$ telle que $f(x) = 1$ et $|||f||| = 1$. On dira dans la suite que f est une forme linéaire duale de x.

1) Soit $x \in X$ avec $\|x\| = 1$, montrer que l'ensemble des formes linéaires duales de x est un convexe.
2) En déduire si le dual X' est strictement convexe alors il n'existe qu'une unique forme linéaire f duale pour chaque $x \in X$ avec $\|x\| = 1$.
3) Soit $e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell^1(\mathbb{N})$, donner deux formes distinctes de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui sont duales de e_1. En déduire que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas strictement convexe.
4) Montrer de même que $\ell^1(\mathbb{N})$ n'est pas strictement convexe en exhibant deux formes duales distinctes d'un même vecteur de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
5) On admet que pour $p \in \,]1, +\infty[$ et $q = 1/(1-1/p)$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^q \in \mathbb{R}$ est strictement convexe en tant que fonction réelle. En déduire que $\ell^q(\mathbb{N})$ est strictement convexe et qu'à chaque suite $(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$ de norme 1, il existe une unique suite duale $(v_n) \in \ell^q(\mathbb{N})$ de norme 1 telle que $\sum u_n v_n = 1$.

Exercice 2 : Duaux de $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$

On considère les espaces de Banach $\ell^1(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ munis de leur normes usuelles. Dans cet exercice, la dualité sera entendue dans le sens de (1).

1) Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est le dual de $\ell^1(\mathbb{N})$, c'est-à-dire que toute forme linéaire sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ peut s'écrire sous la forme (1) avec $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ bien choisie.

2) Montrer qu'il existe une forme linéaire L sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que $L(u_n) = \lim u_n$ pour toute suite $(u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ convergente (on pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach). Montrer que L ne peut s'écrire sous la forme $L(u_n) = \sum a_n u_n$ avec $(a_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ (on pourra penser à tester une telle écriture sur les vecteurs du type $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$). Qu'en déduire concernant $\ell^1(\mathbb{N})$ et le dual de $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

3) Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est le dual de $\ell_0^\infty(\mathbb{N})$, l'ensemble des suites de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (muni de la topologie de $\ell^\infty(\mathbb{N})$).

Exercice 3 : Convergence faible dans $\ell^1(\mathbb{N})$

Dans cet exercice, on travaille dans $\ell^1(\mathbb{N})$. On considère (x^k) une suite qui converge faiblement vers 0, c'est-à-dire

$$\forall y \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \ , \ \sum_{n \geq 0} y_n x_n^k \longrightarrow 0 \ .$$

Le but est de montrer que (x^k) converge en fait fortement vers 0 en raisonnant par l'absurde.

1) Montrer que si (x^k) ne converge pas fortement vers 0, on peut trouver une suite $(\tilde{x}^k)$ de norme 1 qui converge faiblement vers 0.

2) Montrer que, pour tout rang $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{N} |\tilde{x}_n^k| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$ (on pourra tester contre toutes les suites $y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ du type $y_n = \pm 1$ si $n \leq N$ et $y_n = 0$ sinon).

3) Montrer par récurrence qu'on peut trouver une suite extraite $(\tilde{x}^{k_j})$ et des rangs N_j, strictement croissants, tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=N_j}^{N_{j+1}-1} |\tilde{x}_n^{k_j}| \geq \frac{2}{3}$$

En déduire que $(\tilde{x}^k)$ ne tend pas faiblement vers 0 en testant contre l'élément $y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ défini par $y_n = \mathrm{sign}(\tilde{x}_n^{k_j})$ si $n \in [N_j, N_{j+1} - 1]$.

4) Conclure que toute suite faiblement convergente de $\ell^1(\mathbb{N})$ converge en fait fortement.

Barème indicatif : 7/8/7