Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 Université J. Fourier
2007-2008

Feuille d'exercices 8 : théorie spectrale

Si A est un opérateur dans un espace de Hilbert $(X, (\cdot|\cdot))$, on désigne par $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$ les spectres ponctuels, continus et résiduels de A.

Exercice 1. (*Rappels d'algèbre linéaire*). Soit $(X, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert.

1. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint A sur $(X, (\cdot|\cdot))$ sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de A sont orthogonaux.
2. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur unitaire U dans $(X, (\cdot|\cdot))$ sont de module 1.

Exercice 2. (*Opérateur adjoint*). Soit $(X, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert.

1. a). Rappeler pourquoi l'application $J : y \in X \to J_y \in X'$ définie par $J_y(x) = (x \mid y)\ \forall\, x \in X$ est une isométrie surjective antilinéaire.
   Montrer que si A' est l'opérateur dual de A (cf. feuille de TD n^o 2), alors $J^{-1}A'J$ est l'opérateur adjoint A^* de A.

   b). Comment sont reliés les spectres ponctuels, continus et résiduels de A^* et de A' ?
   En déduire que $\sigma(A') = \sigma(A)$.
2. Montrer que $\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A')$ et $\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A') \cup \sigma_r(A')$.
3. Montrer que si A est auto-adjoint $(A^* = A)$ alors $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Exercice 3. (*Opérateur de multiplication sur $\ell^2(\mathbb{N})$*). Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ (muni du produit scalaire usuel) et $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Déterminer la norme, l'adjoint, le rayon spectral et le spectre (ponctuel, continu et résiduel) de l'opérateur linéaire $A : X \to X$ défini par :

$$(Ax)_n = a_n x_n \quad \forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\ .$$

Exercice 4. (*Opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{Z})$*). Soit $Y = \ell^2(\mathbb{Z})$ (muni du produit scalaire usuel). Déterminer la norme, l'adjoint, le rayon spectral et le spectre (ponctuel, continu et résiduel) de l'opérateur linéaire $U : Y \to Y$ défini par :

$$(Uy)_n = y_{n+1} \quad \forall\, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y\ .$$

Exercice 5. (*Opérateurs de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$*). Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$. Déterminer la norme et l'adjoint S^* de l'opérateur linéaire $S : X \to X$ défini par :

$$(Sx)_n = x_{n+1} \quad \forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\ .$$

Montrer que S^* est une isométrie. Cette isométrie est-elle surjective ?
Déterminer les spectres ponctuels, continus et résiduels de S et S^*.