Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 — Université J. Fourier, 2007-2008

Feuille d'exercices 7 : séries de Fourier

Exercice 1. (*Fonctions T-périodiques*) Soit f une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On rappelle qu'une *période* de f est un nombre réel T tel que $f(t+T) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{R}_f = \{T \in \mathbb{R}; T \text{ est une période de } f\}$ est :
   (a) soit réduit à un point : $\mathcal{R}_f = \{0\}$;
   (b) soit un multiple de $\mathbb{Z}$: $\mathcal{R}_f = T_0\,\mathbb{Z}$ avec $T_0 > 0$;
   (c) soit égal à $\mathbb{R}$ tout entier.

   Dans le cas (b) (f périodique non constante) on appelle T_0 la *période fondamentale* de f.

2. Montrer que si f et g sont périodiques non constantes de périodes fondamentales $T_0 > 0$ et $L_0 > 0$, alors $f+g$ est périodique si et seulement si T_0/L_0 est rationnel.
   Dans ce cas, comment s'obtient la période fondamentale de $f+g$ à partir de T_0 et L_0 ?

3. Soit N un entier positif, $T(-N), T(-N+1), \cdots, T(N)$ des réels non nuls et $c_{-N}, c_{-N+1}, \cdots, c_N$ des complexes non nuls. Montrer que

$$t \in \mathbb{R} \mapsto S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left(\mathrm{i}\,\frac{2\pi t}{T(n)}\right)$$

   est périodique non constante si et seulement si $T(n) = T_0/r_n$ avec $r_n \in \mathbb{Z}^\star\ \ \forall\, n = -N, \cdots, N$ (où T_0 est la période fondamentale de S_N).
   Dans ce cas, calculer les coefficients $c_{-N}, \cdots, c_N$ qui minimisent la distance $\|f - S_N\|_{L^2}$ de S_N à une fonction $f \in L^2([0, T_0])$ (avec N, r_n et f fixés).

4. Donner le développement en série de Fourier d'une fonction périodique f de période T (donner des conditions sur f pour que la série converge) et écrire les coefficients $c_n(f)$ de ce développement en fonction de f. Si $T \neq \pm T_0$, certains $c_n(f)$ sont nuls, lesquels ?

Exercice 2. (*Séries de Fourier de cosinus et sinus*) Soit $X = L^2([0,T])$ l'espace de Hilbert réel des fonctions $[0,T] \to \mathbb{R}$ de carré sommable, muni de la norme $\|f\|_{L^2} = (\int_0^T |f(t)|^2 \mathrm{d}t)^{1/2}/\sqrt{T}$.

1. Montrer que les familles de fonctions sur $[0,T]$ suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \left\{1\,,\ \sqrt{2}\sin\Big(\frac{2\pi nt}{T}\Big)\,,\ \sqrt{2}\cos\Big(\frac{2\pi nt}{T}\Big)\ ;\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}\\ \mathcal{F}_2 &= \left\{1\,,\ \sqrt{2}\cos\Big(\frac{\pi nt}{T}\Big)\ ;\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}\end{aligned}$$

   sont des familles orthonormées maximales de X (1 désigne la fonction constante égale à 1). De même, montrer que $\mathcal{F}_3 = \{\sqrt{2}\sin\big(\frac{\pi nt}{T}\big)\ ;\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ est une famille orthonormée. $\mathcal{F}_3$ est-elle maximale ?
   Écrire les développement en série d'une fonction $f \in X$ dans les bases $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\{1\} \cup \mathcal{F}_3$.

2. Développer la fonction $f(t) = |\sin t|^3$ en série de Fourier de cosinus (base $\mathcal{F}_2$ ci-dessus). En déduire les séries de Fourier des premières dérivées de f et discuter leurs convergences. Écrire la formule de Parseval pour f.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f égale à $\cos(\alpha t)$ sur l'intervalle centré $[-\pi, \pi[$ (on distinguera les cas $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$). Montrer que :

$$\frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N} .$$

En déduire par intégration la formule

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) \quad \forall\, x \in]0,1[.$$

Exercice 4. (*Représentation intégrale de la fonction de Bessel J_0*) On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} .$$

Développer $f(t) = \exp(z\,e^{\mathrm{i}\,t}/2)$ et $g(t) = \exp(\overline{z}\,e^{\mathrm{i}\,t}/2)$ en séries de Fourier puis montrer

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z\cos(t)} \mathrm{d}t \quad , \quad z \in \mathbb{C} .$$

Exercice 5. (*Fonctions de type positif*) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est *de type positif* si pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et tout $t_1, t_2, \cdots, t_k \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f(t_i - t_j)\overline{\xi_i}\xi_j \;\geq\; 0 \quad \forall\, \xi_1, \cdots, \xi_k \in \mathbb{C} . \tag{1}$$

1. Montrer que si f est de type positif, alors $f(-t) = \overline{f(t)}$, $0 \leq |\mathrm{Re} f(t)| \leq f(0)$ et $|\mathrm{Im} f(t)| \leq f(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Trouver une fonction g positive qui n'est pas de type positif. Réciproquement, trouver une fonction f de type positif qui n'est pas positive.

2. On suppose que f est 2π-périodique, bornée et égale à sa série de Fourier en tout point $t \in \mathbb{R}$. On note $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f. Montrer que

$$c_n(f) \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est de type positif.}$$

Exercice 6. (*Phénomène de Gibbs*) Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[-\pi, 0[$ et $]0, \pi]$ admettant une discontinuité en 0 (c'est-à-dire, les limites à gauche et à droite

$$f_- = \lim_{t \to 0-} f(t) \quad \text{et} \quad f_+ = \lim_{t \to 0+} f(t)$$

existent et sont distinctes). On veut étudier le comportement pour N grand de la somme partielle de la série de Fourier $S_N f$ au voisinage de $t = 0$.

1. Montrer que
$$f(t) = \frac{f_+ - f_-}{2} s(t) + h(t)$$
où h est continue sur $[-\pi, \pi]$ et $s : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ est définie par :
$$s(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \pi . \end{cases}$$

2. Déterminer les coefficients de Fourier c_n de s.

3. Déterminer les extrema de
$$(S_N s)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{\mathrm{i}\, nt}$$
et tracer son graphe. Montrer que le premier maximum de $S_N s$ à droite (ou à gauche) de l'origine tend vers $(2/\pi)\int_0^\pi \sin(u)/u\, du$ quand $N \to \infty$. Vous pourrez estimer sa valeur à l'aide de votre ordinateur ou de votre calculatrice.

4. En supposant $h \in C^1([-\pi, \pi])$, estimer la valeur du 1er maximum de $S_N f$ quand $N \to \infty$.