Feuille d’exercices 6 : espaces de Hilbert (2)

Exercice 1. Soit $(X, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien. On admet[1] qu’il existe un espace complet $\overline{X}$ tel que X est dense dans $\overline{X}$. Montrer que l’on peut étendre le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\overline{X}$ de X de la manière suivante. Si $x, y \in \overline{X}$ et les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergent respectivement vers x et y, on définit :

$$(x \mid y) = \lim_{n\to\infty} (x_n \mid y_n) \,. \tag{1}$$

1. Montrer que la limite (1) existe.
2. Montrer que $(x \mid y)$ est indépendant des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisies.
3. Montrer que $(\overline{X}, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace de Hilbert.

Exercice 2. Soit $(X, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert. Si $E \subset X$, on note vect(E) l’espace vectoriel engendré par E (plus petit sous-espace vectoriel de X contenant E), $\overline{E}$ l’adhérence de E et $\langle E\rangle = \overline{\text{vect(E)}}$.

1. Montrer que $E^\perp = \big(\text{vect}(E)\big)^\perp = \big(\overline{E}\big)^\perp = \langle E\rangle^\perp$.
2. Montrer que $(E^\perp)^\perp = \langle E\rangle$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $E^\perp$ pour que vect(E) soit dense dans X.

Exercice 3. Montrer que la topologie faible sur un espace de Hilbert est complète : toute suite faiblement de Cauchy sur X est faiblement convergente.
Généraliser ce résultat au cas d’un espace de Banach réflexif $(X, \|\cdot\|)$. Trouver un contre-exemple dans le cas de l’espace de Banach non réflexif $X = c_0(\mathbb{N})$ (suites réelles tendant vers zéro).

Exercice 4. On se place dans $X = L^2([-1, 1])$ (muni du produit scalaire $(h \mid g) = \int_{-1}^{1} h(t)\overline{g}(t)\mathrm{d}t$). Pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Legendre P_n est défini par :

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{n!\,2^n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^n \Big((t^2-1)^n\Big).$$

1. Montrer que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de X.
2. Montrer que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée maximale.
   Indication : On pourra utiliser la densité de l’espace des polynômes $\{P : [-1, 1] \to \mathbb{C}\}$ dans $(C([-1, 1]), \|.\|_\infty)$ (Stone-Weierstrass).

Exercice 5. Soit $(X, (\cdot \mid \cdot))$ un espace de Hilbert. Soit U une application linéaire *surjective* $X \to X$ préservant le produit scalaire (transformation unitaire) : $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)\ \forall\, x, y \in X$.

1. Montrer que $\|U\| = 1$ et que si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille orthonormée maximale de X, alors c’est également le cas pour $\{Ue_i\}_{i\in I}$.
2. Montrer que $[\mathrm{Im}(Id - U)]^\perp = \ker(Id - U)$ (où Id est l’application identité).

[1] Plus généralement, il est possible de montrer que si (X, d) est un espace métrique non complet, on peut trouver un espace métrique complet $(\overline{X}, \overline{d})$, appelé le complété de X, tel que X est isométrique à un sous-ensemble dense dans $(\overline{X}, \overline{d})$.

3. Montrer que pour tout $x \in X$, la limite

$$Px = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i x$$

existe et définit une projection orthogonale $P : X \to \ker(Id - U)$.
Indication : on pourra utiliser la décomposition $X = \overline{\mathrm{Im}(Id - U)} \oplus \ker(Id - U)$.

Exercice 6. Soit $h(\cdot, \cdot)$ une forme sesquilinéaire[2] sur un espace de Hilbert $(X, (\cdot \mid \cdot))$ vérifiant

$$\exists\, C > 0 \;,\; |h(x,y)| \le C\|x\|\|y\| \quad \forall\, x, y \in X \;. \tag{2}$$

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $A \in \mathcal{L}(X)$ de norme égale à la plus petite constante C dans l'inégalité (2) telle que :

$$h(x,y) = (x \mid Ay) \quad , \quad x, y \in X \;.$$

2. Soit $\varphi \in X'$. Montrer que si h est *coercive*, c'est-à-dire, si

$$\exists\, c > 0 \;,\; h(x,x) \ge c\|x\|^2 \quad \forall\, x \in X \;,$$

alors il existe un unique $y \in X$ tel que $h(x,y) = \varphi(x)\ \forall\, x \in X$.
Indication : D'après 1., il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(A) = X$, c'est-à-dire, $\mathrm{Im}(A)$ est fermé et est dense dans X.

3. Supposons que h soit coercive et hermitienne ($h(y,x) = \overline{h(x,y)}$ pour tout $x, y \in X$). Montrer qu'alors le vecteur y dans la question précédente est l'unique minimum de la fonctionnelle ψ définie par[3]

$$\psi(x) = \frac{1}{2} h(x,x) - \mathrm{Re}(\varphi(x)) \;.$$

[2]On rappelle qu'une forme sesquilinéaire sur X est une fonction $h : X \times X \to \mathbb{C}$ vérifiant
(i) $h(\lambda x + y, z) = \lambda h(x,z) + h(y,z)$
(ii) $h(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} h(x,y) + h(x,z)$
pour tout $x, y, z \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

[3]Les résultats des questions 2. et 3. constituent le théorème de Lax-Milgram, qui est très utile pour résoudre les équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques.