Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 Université J. Fourier
2007-2008

Feuille d’exercices 5 : espaces de Hilbert (1)

Exercice 1. Soit $(X,(.|.))$ un espace de Hilbert, $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé de X et $M^\perp$ son orthogonal. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire et $d(x,M) = \inf_{y\in M} \|x-y\|$ la distance de M au point $x \in X$. Montrer que

$$d(x,M) = \sup_{y\in M^\perp, \|y\|=1} |(x|y)| \; = \max_{y\in M^\perp, \|y\|=1} |(x|y)| \, .$$

Exercice 2. Trouver une démonstration du théorème de Hahn-Banach (version analytique) ne faisant pas appel au lemme de Zorn dans le cas particulier où l’espace de Banach est un espace de Hilbert.

Exercice 3. Soit $(X,(.|.))$ un espace de Hilbert, N un entier fixé, $1 \le N < \infty$, et $\{e_i\}_{i=1,\dots N}$ une famille orthonormée de X.

1. Soit $x \in X$ fixé. Déterminer le minimum de la fonction $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_+$ définie par

   $$f(c_1,\dots,c_N) = \Big\| x - \sum_{i=1}^N c_i e_i \Big\|$$

   ainsi que les valeurs de c_i rendant f minimale.

2. Déterminer la valeur minimale de l’intégrale

   $$I(a,b,c) = \int_{-1}^1 \big| t^3 - a - bt - ct^2 \big|^2 \, \mathrm{d}t$$

   en fonction des nombres complexes a,b,c.

Exercice 4. Soit $(X,(.|.))$ un espace de Hilbert et $\{e_i\}_{i=1,\dots,\infty}$ une famille orthonormée de X. Soit $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que le sous-ensemble

$$C_a = \Big\{ x \in X ; x = \sum_{i=1}^\infty c_i e_i \text{ avec } c_i \in \mathbb{C}, |c_i| \le a_i \;\; \forall\, i \in \mathbb{N} \Big\}$$

(cube de Hilbert) est compact si et seulement si $a \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 5. Montrer qu’un espace vectoriel normé $(X,\|.\|)$ (respectivement un espace de Banach) est un espace préhilbertien (resp. un espace de Hilbert) si et seulement si la norme $\|.\|$ vérifie l’identité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ pour tout $x, y \in X$.
Indication (condition suffisante) : on pourra montrer que

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right)$$

définit un produit scalaire.