**Feuille d'exercices 4 : espaces de Banach (4)**

**Exercice 1.** Le but de cet exercice est de prouver le théorème suivant.

**Thm A (Hahn-Banach, forme géométrique):** *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Soit* $A \subset X$, $B \subset X$ *deux sous-ensembles convexes*[1] *, non vides et disjoints de* $X$.

*(I) On suppose de plus que* $A$ *est ouvert. Alors il existe* $F \in X' \setminus \{0\}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$F(x) \leq \alpha \ \forall x \in A \quad , \quad F(y) \geq \alpha \ \forall y \in B \ .$$

*(II) On suppose que* $A$ *est fermé et* $B$ *est compact. Alors il existe* $F \in X' \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que :*

$$F(x) \leq \alpha - \varepsilon \ \forall x \in A \quad , \quad F(y) \geq \alpha + \varepsilon \ \forall y \in B \ .$$

Géométriquement, l'ensemble des points $x \in X$ tels que $F(x) = \alpha$ (avec $F \neq 0$ fixé) est un hyperplan fermé $\mathcal{P}$ (prouver que $\mathcal{P}$ est fermé si $F \in X'$ !). Le théorème montre donc qu'il existe un tel hyperplan séparant $A$ est $B$ (c'est-à-dire, $A$ et $B$ se situent de part et d'autre de $\mathcal{P}$).

1. Reprendre la démonstration du théorème de Hahn-Banach vue en cours pour montrer la version plus générale suivante de ce théorème (dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

**Thm B (Hahn-Banach, forme analytique) :** *Soit* $X$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $p : X \to \mathbb{R}$ *une application vérifiant :*

$$p(tx) = tp(x) \quad \forall\, t > 0 \,,\ \forall\, x \in X \tag{1}$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\, x, y \in X \ . \tag{2}$$

*Soit* $M \subset X$ *un sous-espace vectoriel de* $X$ *et* $f : M \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire sur* $M$ *telle que* $f(x) \leq p(x) \ \forall\, x \in M$. *Alors* $f$ *peut être prolongée en une forme linéaire* $F$ *sur* $X$ *telle que* $F(x) \leq p(x) \ \forall\, x \in X$.

2. Soit $C \subset X$ un ouvert convexe de $X$ contenant l'origine. On définit la fonctionnelle de Minkowski de $C$ par :
$$p(x) = \inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\} \quad , \quad x \in X \ . \tag{3}$$
   (a) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $p(x) \leq k\|x\| \ \forall\, x \in X$.
   (b) Montrer que $C = \{x \in X; p(x) < 1\}$.
   (c) Montrer que $p(x)$ satisfait (1) et (2).
   (d) Montrer que si $x_0 \in X \setminus C$, alors il existe $F \in X' \setminus \{0\}$ tel que $F(x) < F(x_0) \ \forall\, x \in C$. Cette affirmation est-elle toujours vraie si $C \neq \emptyset$ ne contient pas l'origine ?
   *Indication :* Considérer la forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0$ définie par $f(\lambda x_0) = \lambda \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ et appliquer le théorème B.

3. Soit $A$ et $B$ comme dans le théorème A *(I)*.
   (a) Montrer que $A - B = \{x - y; x \in A, y \in B\}$ est un ouvert convexe ne contenant pas l'origine.
   (b) Déduire de la question 2(d) qu'il existe $F \in X'$ tel que $F(x) < F(y) \ \ \forall\, x \in A, \ \forall\, y \in B$.
   (c) Prouver la partie *(I)* du théorème A.

[1]On rappelle que $C \subset X$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in C$, $tx + (1-t)y \in C \ \forall\, t \in ]0, 1[$.

4. Soit $A$ et $B$ comme dans le théorème A *(II)*. On définit :

$$A_\varepsilon = \{x + z; x \in A, z \in X, \|z\| < \varepsilon\} \quad , \quad B_\varepsilon = \{y + z; y \in B, z \in X, \|z\| < \varepsilon\} .$$

Montrer que $A_\varepsilon$ et $B_\varepsilon$ sont des ouverts convexes non vides et que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ pour $\varepsilon$ assez petit. Prouver la partie *(II)* du théorème A.

**Exercice 2.** Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $C \subset X$ un sous-ensemble convexe. Montrer que $C$ est fermé pour la topologie faible si et seulement si $C$ est fermé pour la topologie de la norme.

**Exercice 3.** Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé de $X$, $M \neq X, \emptyset$. On définit l'application $R : X' \to M'$ qui à tout $f \in X'$ associe sa restriction à $M$, $Rf = f|_M$.

1. Montrer que $R$ est une application linéaire bornée $X' \to M'$.
2. Montrer que $R$ est surjective et que $\|R\| = 1$.
3. Montrer que $R$ n'est pas injective (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1, feuille 3). Montrer que

$$\mathcal{I} : \begin{cases} X'/\ker(R) & \to M' \\ [f] & \mapsto Rf \end{cases}$$

est une bijection linéaire continue (on munit $X'/\ker(R)$ de la norme définie à l'exercice 2 de la feuille 3).

4. On suppose $M$ de codimension finie : $X = M \oplus N$ avec $\dim N < \infty$. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $N$. Montrer qu'il existe $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X'$ tels que :

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in M \text{ ou } x = e_j, j \neq i \\ 1 & \text{si } x = e_i \ . \end{cases}$$

Montrer que $M = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$ . En déduire que $\ker(R)$ a pour dimension $n$.

5. Soit $X = C([0,1])$ (muni de la norme sup $\|.\|_\infty$) et $M = \{h \in C([0,1]); h(0) = h(1) = 0\}$. Montrer que $M$ est de codimension 2. Déterminer $\ker(R)$ et décrire $X'$ à partir de $M'$.