Feuille d’exercices 3 : espaces de Banach (3)

Exercice 1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $M \subset X$ un sous-espace vectoriel de X. Montrer à l’aide du théorème de Hahn-Banach que, si l’affirmation $f(x) = 0\ \forall\, x \in M \Rightarrow f = 0$ est vraie pour tout $f \in X'$, alors M est dense dans X.

Exercice 2. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et $M \subset X$ un sous-espace vectoriel fermé de X. On considère l’ensemble quotient $X/M = \{[x]; x \in X\}$ des classes d’équivalence modulo M[1]. On munit X/M des lois d’addition et de multiplication par un scalaire suivantes :

$$[x] + [y] = [x + y] \quad , \quad \lambda \cdot [x] = [\lambda \cdot x] \quad , \quad x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}\,.$$

1. Vérifier que ces définitions ont un sens et montrer que X/M est un espace vectoriel.
2. Montrer que
$$\big\|[x]\big\| = \inf_{z \in M} \big\|x - z\big\|_X = \mathrm{dist}(x, M)$$
définit une norme sur X/M.
3. Montrer que $\pi : x \in X \mapsto [x] \in X/M$ est continue pour la norme de la question précédente.
4. Montrer que $(X/M, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Exercice 3. Soit $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces de Banach tels que $Y \subset X$ est dense dans $(X, \|.\|_X)$ et $Y \neq X, \emptyset$. On suppose que l’injection

$$I : y \in Y \mapsto y \in X$$

est continue, c’est-à-dire, il existe $c > 0$ tel que $\|y\|_X \leq c\|y\|_Y$ pour tout $y \in Y$. On notera que les normes $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$ ne peuvent pas être équivalentes (car cela impliquerait $Y = X$).

1. Montrer que l’application linéaire duale I^* de I (cf. feuille 2, exercice 1) associe à toute forme linéaire bornée f sur X sa restriction $f|_Y$ à Y.
2. Montrer que I^* est injective.
3. Montrer que I^* n’est pas surjective.
Indication : On pourra raisonner par l’absurde et montrer à l’aide du théorème de l’application ouverte que si I^* est une bijection, alors les normes $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$ sont équivalentes.
4. Soit $f \in Y'$. Montrer que $f \in I^*(X') \Leftrightarrow\ \exists\ C > 0$ tel que $|f(y)| \leq C\|y\|_X\ \ \forall\, y \in Y$.
5. Montrer que si Y est réflexif, alors $I^*(X')$ est dense dans Y' (on pourra se servir de l’exercice 1).
6. On considère le cas $X = L^1(\mathbb{R})$ (muni de la norme $\|.\|_X = \|.\|_{L^1}$) et
$$Y = \{h \in X; \|h\|_Y < \infty\}$$
avec
$$\|h\|_Y = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)|f(t)|\mathrm{d}t\,.$$
Montrer que l’on se trouve bien dans les hypothèses de départ. Donner un exemple de forme linéaire $f \in Y'$ qui n’est pas dans $I^*(X')$.

[1] On rappelle que $x' \sim x$ modulo M si et seulement si $x' - x \in M$, et $[x] = \{x'; x' \sim x\}$.