Feuille d'exercices 2 : espaces de Banach (2)

Dans la suite, $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ désignent des espaces de Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ est l'algèbre des applications linéaires bornées $X \to Y$ et X', Y' sont les duals topologiques de X, Y.

Exercice 1. On associe à tout $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ son *application duale* $A^* : f \in Y' \mapsto A^* f$ définie par :

$$(A^* f)(x) = f(Ax) \quad , \quad \forall\, f \in Y' \quad , \quad \forall\, x \in X\,.$$

1. Montrer que A^* est une application linéaire bornée $Y' \to X'$ de norme $\|A^*\| = \|A\|$.

2. Pour $F \subset Y$ et $G \subset X'$, on pose $F^\perp = \{f \in Y'; f(y) = 0 \;\; \forall\, y \in F\}$, $G^\perp = \{x \in X; g(x) = 0 \;\; \forall\, g \in G\}$. On définit de même $E^\perp \subset X'$ et $H^\perp \subset Y$ si $E \subset X$ et $H \subset Y'$. Montrer que le noyau de A (de A^*) et l'image de A^* (de A) sont reliés par :

$$\ker(A) = \mathrm{Im}(A^*)^\perp \quad , \quad \ker(A^*) = \mathrm{Im}(A)^\perp \quad , \quad \mathrm{Im}(A) \subset \ker(A^*)^\perp \quad , \quad \mathrm{Im}(A^*) \subset \ker(A)^\perp\,.$$

Exercice 2. Soit $1 < p < \infty$.

1. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est strictement convexe, c'est-à-dire, pour tout $a, b \in \ell^p(\mathbb{N})$ tels que $\|a\|_{\ell^p} = \|b\|_{\ell^p} = 1$ et $a \neq b$ on a :
$$\|ta + (1-t)b\|_{\ell^p} < 1 \quad \forall\, t \in]0, 1[\,.$$
Cette affirmation est-elle vraie pour $\ell^1(\mathbb{N})$ et pour $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

2. En déduire que pour tout $x_0 \in X = \ell^p(\mathbb{N})$, $x_0 \neq 0$, il existe une *unique* forme linéaire $f_0 \in X'$ telle que $\|f_0\|_{X'} = 1$ et $f_0(x_0) = \|x_0\|_X$.

Exercice 3. Montrer que si X est réflexif ($X'' = X$) alors pour tout $f_0 \in X'$,

$$\|f_0\|_{X'} = \sup_{x \in X} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|_X} = \max_{x \in X} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|_X}\,.$$

Montrer que cette affirmation est fausse (le sup n'est pas atteint) sur l'espace de Banach non réflexif $\ell^1(\mathbb{N})$ (on pourra chercher un contre–exemple de la forme $f_b(a) = \sum_n b_n a_n \;\; \forall\, a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$).

Exercice 4. Montrer que tout sous-espace vectoriel $E \subset X$ de dimension finie a un supplémentaire topologique (c'est-à-dire, il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset X$ tel que $X = E \oplus F$).

Exercice 5. La topologie $*$-faible sur X' est par définition la topologie la plus grossière rendant les applications linéaires $\varphi_x : f \in X' \mapsto f(x)$ continues pour tout $x \in X$. Autrement dit, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X' converge $*$-faiblement vers f si et seulement si $f_n(x) \to f(x) \;\; \forall\, x \in X$.

1. Montrer que toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $*$-faiblement convergente est uniformément bornée, a une limite f dans X' et vérifie :
$$\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X'}\,.$$

2. Montrer que si X n'est pas réflexif, alors la topologie $*$-faible sur X' est plus grossière que la topologie faible sur X' (c'est-à-dire, toute suite faiblement convergente est $*$-faiblement convergente mais la réciproque est fausse).

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X' convergeant $*$-faiblement vers f et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X convergeant vers x (au sens de la norme). Montrer qu'alors $f_n(x_n) \to f(x)$.