Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 — Université J. Fourier

2007-2008

Feuille d'exercices 1 : espaces de Banach (1)

Exercice 1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de *dimension finie* et $\{e_1, \ldots, e_N\}$ une base de X. On peut donc associer à tout vecteur $x \in X$ ses (uniques) composantes $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_N(x) \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans cette base :

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\, e_i \ .$$

1. Montrer que
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\lambda_i(x)|$$
définit une norme sur X.
2. Montrer qu'il existe des constantes $0 < c < C < \infty$ telles que $c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in X$. En déduire que toutes les normes sur X sont équivalentes.
3. Montrer que $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach.
4. Déduire de la question 1 que toutes les formes linéaires sur X sont bornées et donc continues.

Exercice 2. Construire des exemples de formes linéaires non bornées sur $\ell^p(\mathbb{N})$ et sur $L^p([0,1])$, $1 \leq p \leq \infty$. Plus généralement, montrer qu'il y a toujours des formes linéaires non bornées sur un espace vectoriel normé de *dimension infinie*.

Exercice 3. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et A_n, $n \in \mathbb{N}$, des applications linéaires $X \to X$ *uniformément bornées*, c'est-à-dire telles que $\sup_n \|A_n\| < \infty$. Montrer que si il existe $D \subset X$ dense dans X tel que la suite $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in D$, alors elle converge pour tout $x \in X$ et sa limite Ax définit une application linéaire bornée $X \to X$.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $C_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ à support compact, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$.

1. Montrer que $(C_c(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ n'est pas complet.
2. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini,
$$C_0(\mathbb{R}^d) = \big\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ continue } ; \ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, K \subset \mathbb{R}^d \text{ compact } , |f(x)| < \varepsilon \ \forall\, x \notin K \big\} \ .$$
3. L'espace vectoriel normé $(C_0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ est-il complet ?

Exercice 5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $|\Omega| < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$ si et seulement si $f \in L^p(\Omega)$ pour tout $p \in]1, \infty[$ et

$$\sup_{1<p<\infty} \|f\|_{L^p} < \infty \ .$$

Dans ce cas, montrer que $\|f\|_{L^p} \to \|f\|_{L^\infty}$ quand $p \to \infty$.
Indication : On rappelle que si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, E \subset \Omega$ de mesure de Lebesgue $|E| > 0$ tel que $|f(x)| > \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon$ pour tout $x \in E$.

Exercice 6. Soit $1 < p < \infty$. Pour tout $f \in L^p([0, \infty[)$, on pose :

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad , \quad x > 0 \ .$$

1. Montrer que pour tout $f \in C_c([0,\infty[)$,

$$\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p} \qquad \text{(inégalité de Hardy).} \tag{1}$$

   Indication : Il suffit de considérer le cas $f \geq 0$. Intégrer par parties, puis utiliser l'inégalité de Hölder.

2. Montrer que l'inégalité (1) est vraie pour tout $f \in L^p([0,\infty[)$.

3. Montrer que $A : f \mapsto F$ est une application linéaire bornée $L^p \to L^p$ de norme $\|A\| = p/(p-1)$.
   Indication : Pour montrer que $\|A\| \geq p/(p-1)$, considérer les fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} (x \ln n)^{-1/p} & \text{si } 1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   pour n arbitrairement grand.

4. Montrer que si $f \in L^1([0,\infty[)$ est positive, alors $F \notin L^1$.