

Exercices de révision : topologie

Exercice 1. On définit les trois distances suivantes sur $X = \mathbb{R}$:

$$d_1(x, y) = |x - y| \quad , \quad d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad , \quad d_3(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| .$$

1. Comparer pour $i = 1, 2$ et 3 l'ensemble de toutes les suites de Cauchy dans (X, d_i) .
Les espaces métriques (X, d_i) sont-ils complets ?
2. Vérifier que d_1, d_2 et d_3 définissent la même topologie τ sur X .

Exercice 2. Soit X un ensemble. On définit la topologie grossière τ_g et la topologie discrète τ_d sur X par :

- (i) $\tau_g = \{\emptyset, X\}$;
- (ii) $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ = ensemble de toutes les parties de X .

1. Caractériser les suites convergentes dans (X, τ_g) et dans (X, τ_d) .
Caractériser les fonctions continues $f : (X, \tau_g) \rightarrow (X, \tau_g)$. Même question pour les fonctions continues $(X, \tau_d) \rightarrow (X, \tau_d)$, $(X, \tau_g) \rightarrow (X, \tau_d)$ et $(X, \tau_d) \rightarrow (X, \tau_g)$.
2. Soit $E \subset X$ un ensemble non réduit à un point. Caractériser les points d'accumulation, l'adhérence, l'intérieur et la frontière de E pour les topologies τ_g et τ_d .
3. On suppose $X = \mathbb{R}^n$ et on munit X d'une troisième topologie τ , la topologie associée à la norme $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Comparer les ensembles de fonctions $\{f : (X, \tau_g) \rightarrow (X, \tau) \text{ continue}\}$, $\{f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau) \text{ continue}\}$ et $\{f : (X, \tau_d) \rightarrow (X, \tau) \text{ continue}\}$.