Corrigé du devoir surveillé du 13 décembre

Exercice 1.

1. On va montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), d'où l'équivalence entre les 3 affirmations.

   (i) $\Rightarrow$ (iii). On sait que l'application $J : x \in X \mapsto J_x \in X''$ définie par $J_x(f) = f(x)$ $\forall\, f \in X'$, $\forall\, x \in X$, est une isométrie. D'après (i), $J_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ et donc $\sup_n |J_{x_n}(f)| < \infty$ pour tout $f \in X'$. On en déduit grâce au théorème de Banach-Steinhaus que $\sup_n \|x_n\| = \sup_n \|J_{x_n}\| < \infty$. Soit $i \in I$. Puisque $f_i = (\cdot|e_i) \in X'$ (Cauchy-Schwarz), on a $(x_n|e_i) = f_i(x_n) \to f_i(x) = (x|e_i)$ quand $n \to \infty$.

   (iii) $\Rightarrow$ (ii). Comme $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille orthonormée maximale, l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_i, $M = \mathrm{vect}\{e_i; i \in I\}$, est dense dans X. Il découle de (iii) et de la linéarité de la limite que pour tout $y = \sum_{\text{finie}} \lambda_i e_i \in M$, $(x_n|y) \to (x|y)$ quand $n \to \infty$.

   (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $\varepsilon > 0$ et $z \in X$. Il existe $y \in M$ tel que $\|z - y\| \le \varepsilon(2\|x\| + 2\sup_n \|x_n\|)^{-1}$ (car M est dense dans X). Par hypothèse, $(x_n|y) \to (x|y)$ quand $n \to \infty$, donc $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge N \Rightarrow |(x_n - x|y)| \le \varepsilon/2$. En vertu des inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz,

   $$\big|(x_n - x|z)\big| = \big|(x_n - x|z - y) + (x_n - x|y)\big| \quad\le\quad (\|x_n\| + \|x\|)\|z - y\| + |(x_n - x|y)| \le \varepsilon\ .$$

   Il s'ensuit que $(x_n|z) \to (x|z)$ quand $n \to \infty$ pour tout $z \in X$, c'est-à-dire, $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in X'$ (en vertu du théorème de représentation de Riesz).

2. Soit $X = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de la norme usuelle et $x_n = (0, \dots, n, 0, \dots)$ (n est en n-ième position). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(x_n|e_i) = n\,\delta_{n\,i} \to 0 = (x|e_i)$ quand $n \to \infty$, avec $x = 0$. Mais $\|x_n\| = n$ d'où $\sup_n \|x_n\| = \infty$ et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement (sinon on aurait une contradiction avec (iii) $\Leftrightarrow$ (i)).
   Remarque : on peut montrer directement que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement en considérant $z = (1, 1/2, 1/3, \dots) \in X \setminus M$ avec $M = \mathrm{vect}\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ ($e_0, e_1, \dots$ sont les vecteurs de la base canonique). On a $(x_n|y) \to 0 = (0|y)$ $\forall\, y \in M$ mais $(x_n|z) = n/(n+1) \to 1 \ne (0|z)$.

Exercice 2.

1. En vertu du théorème de Fubini,

   $$\begin{aligned}(\varphi_i \otimes \psi_j|\varphi_k \otimes \psi_l) &= \int_{[-1,1]^2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\varphi_i(t)\psi_j(s)\overline{\varphi_k(t)\psi_l(s)} \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\,\varphi_i(t)\overline{\varphi_k(t)} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s\,\psi_j(s)\overline{\psi_l(s)} \;=\; \delta_{i\,k}\,\delta_{j\,l}\ .\end{aligned}$$

   En particulier, $\|\varphi_i \otimes \psi_j\|^2 < \infty$ (prendre $i = k$ et $j = l$) d'où $\varphi_i \otimes \psi_j \in X$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. De plus, $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de X.

2. Si $h \in X$, alors $h_i : s \in [-1, 1] \mapsto \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\,h(t, s)\overline{\varphi_i(t)}$ est mesurable. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini,

   $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}s\,|h_i(s)|^2 &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s \left|\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\,h(t, s)\overline{\varphi_i(t)}\right|^2 \\ &\le \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\,|h(t, s)|^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\,|\varphi_i(t)|^2}_{=1} = \int_{[-1,1]^2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,|h(t, s)|^2 < \infty\ .\end{aligned}$$

   D'où $h_i \in L^2([-1, 1])$. De plus, en utilisant à nouveau Fubini,

   $$\langle h_i|\psi_j\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}s \left(\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\,h(t, s)\overline{\varphi_j(t)}\right) \overline{\psi_j(s)} = \int_{[-1,1]^2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,h(t, s)\overline{\varphi_j(t)\psi_j(s)} = (h|\varphi_i \otimes \psi_j)\ .$$

3. Il suffit de montrer que si $h \in X$ vérifie $(h|\varphi_i \otimes \psi_j) = 0 \; \forall \; (i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors $h = 0$. D'après 2 et puisque $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée maximale, $(h|\varphi_i \otimes \psi_j) = \langle h_i|\psi_j\rangle = 0 \; \forall \; j \in \mathbb{N}$ entraîne $h_i(s) = 0$ pour presque tout (p.t.) $s \in [-1,1]$. Comme $\int_{[-1,1]^2} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,|h(t,s)|^2 < \infty$, les fonctions $h(\cdot,s) : t \in [-1,1] \mapsto h(t,s)$ sont dans $L^2([-1,1])$ pour p.t. $s \in [-1,1]$ (théorème de Fubini). Donc si h vérifie les hypothèses ci-dessus, alors

$$\langle h(\cdot,s)|\varphi_i\rangle \;=\; h_i(s) = 0 \quad \forall \, i \in \mathbb{N} \;, \quad \text{pour p.t. } s \in [-1,1].$$

Puisque $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille maximale, on en déduit que $h(\cdot,s) = 0$ pour p.t. $s \in [-1,1]$, c'est-à-dire, $h(t,s) = 0$ pour p.t. $(t,s) \in [-1,1]^2$. Ceci montre que $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée maximale de X. Ainsi, on peut développer toute fonction $h \in X$ sous la forme

$$h = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} c_{i,j}\, \varphi_i \otimes \psi_j \;,$$

avec $c_{i,j} = (h|\varphi_i \otimes \psi_j)$. On écrit souvent cette propriété de la manière suivante :
$X = L^2([-1,1]) \otimes L^2([-1,1])$ (= *produit tensoriel* de $L^2([-1,1])$ par lui-même).

4a). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans M convergeant vers f. On a :

$$\big|f(t) - f(-t)\big|^2 \leq \big(|f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(-t)|\big)^2 \leq 2\big|f(t) - f_n(t)\big|^2 + 2\big|f_n(t) - f(-t)\big|^2$$

(on a utilisé l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \;\; \forall \, a,b \in \mathbb{R}$). Comme $f_n \in M$, on obtient :

$$\int_0^1 \mathrm{d}t\, \big|f(t) - f(-t)\big|^2 \leq 2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}t\, \big|f(t) - f_n(t)\big|^2 \,.$$

L'intégrale du membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc l'intégrale du membre de gauche est nulle. Puisque $|f(t) - f(-t)|^2 \geq 0$, cela implique $f(t) - f(-t) = 0$ pour p.t. $t \in [-1,1]$. Ainsi, $f \in M$ et donc M est fermé.
Attention ! $f_n \to f$ dans $L^2([-1,1])$ n'implique pas $f_n(t) \to f(t)$ pour p.t. $t \in [-1,1]$. On peut toutefois montrer (cf. la démonstration du théorème de Riesz-Fischer) que l'on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{n_k}(t) \to f(t)$ quand $k \to \infty$ pour p.t. $t \in [-1,1]$.

4b). Soit E le sous-espace vectoriel des (classes d'équivalence de) fonctions impaires de $L^2([-1,1])$,

$$E = \big\{ f \in L^2([-1,1]); f(-t) = -f(t) \text{ pour p.t. } t \in [-1,1] \big\} \,.$$

Montrons que $M^\perp = E$. On prouve comme à la question 4a) que E est fermé. Pour tout $f \in M$ et $g \in E$ on a $\langle f|g\rangle = 0$ (car $f(t)\overline{g(t)}$ est impaire). Donc $E \subset M^\perp$. En particulier, $M \cap E = \{0\}$. Or tout $f \in L^2([-1,1])$ se décompose comme la somme $Pf + Qf$ d'une fonction paire $(Pf)(t) = (f(t){+}f(-t))/2$ et d'une fonction impaire $(Qf)(t) = (f(t){-}f(-t))/2$. On vérifie facilement que Pf et Qf sont dans $L^2([-1,1])$: par exemple, $|(Pf)(t)|^2 \leq (|f(t)|^2 + |f(-t)|^2)/2$ d'où $\|Pf\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 < \infty$. Donc $Pf \in M$ et $Qf \in E$. Ceci montre que E est le supplémentaire topologique de M, $X = M \oplus E$. Mais on a vu que $E \subset M^\perp$, par conséquent $E = M^\perp$. De plus, P et Q sont respectivement les projecteurs orthogonaux sur M et $M^\perp$.

4. Soit $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ des familles orthonormées maximales de M et de $M^\perp$ (il est clair que $\dim(M) = \dim(M^\perp) = \infty$ et M et $M^\perp \subset L^2([-1,1])$ sont séparables). D'après 4b puis 1, $\{p_i, q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{p_i \otimes p_j, p_i \otimes q_j, q_i \otimes p_j, q_i \otimes q_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ sont respectivement des familles orthonormées maximales de $L^2([-1,1])$ et de X. On montre comme en 4a) que N et fermé, d'où $X = N \oplus N^\perp$. Comme $\{q_i \otimes q_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée maximale de N, on en déduit que $\{p_i \otimes q_j, q_i \otimes p_j, q_i \otimes p_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée maximale de $N^\perp$. Autrement dit, $N^\perp = F + G$ (la somme n'est pas directe), avec :

$$\begin{aligned} F &= \big\{ h \in X \;;\; h(-t,s) = -h(t,s) \;\text{ pour p.t. } (t,s) \in [-1,1]^2 \big\} \\ G &= \big\{ h \in X \;;\; h(t,-s) = -h(t,s) \;\text{ pour p.t. } (t,s) \in [-1,1]^2 \big\} \,. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. L'application $A : f \mapsto Af = g * f$ est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale et distributivité du produit de fonctions. On sait que si f et g sont intégrables sur $[0, 2\pi]$ et g est 2π-périodique, alors $c_n(g \star f) = c_n(g)c_n(f)\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$ (voir cours). Comme f et $g \in X = L^2([0, 2\pi])$, on a $\|f\|^2 = \sum_n |c_n(f)|^2$ (Parseval) et $c_n(g) \to 0$ quand $n \to \pm\infty$ (Riemann-Lebesgue), de sorte que $\|c(g)\|_\infty < \infty$. . Par conséquent,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|c_n(Af)\big|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|c_n(g)c_n(f)\big|^2 \le \big\|c(g)\big\|_\infty^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \big\|c(g)\big\|_\infty^2 \big\|f\big\|^2 < \infty \ .$$

   Cela prouve que $Af = \sum_n c_n(Af)\varphi_n \in X$ (la série converge en norme L^2), où $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est la famille orthonormée maximale définie par $\varphi_n(t) = e^{\mathrm{i}\,nt}$. Donc A est une application $X \to X$ et

$$\big\|Af\big\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|c_n(Af)\big|^2 \le \big\|c(g)\big\|_\infty \|f\|^2 \quad , \quad f \in X \ .$$

   On en déduit que A est borné et que $\|A\| \le \|c(g)\|_\infty$.

2. Soit f et $g \in X$. On vérifie grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'identité de Parseval que $\sum_n |c_n(Af)| = \sum_n |c_n(g)c_n(f)| \le \|g\|\,\|f\| < \infty$. Donc la série $\sum_n c_n(Af)\varphi_n(t)$ converge normalement par rapport à t, sa somme est continue et vaut $(Af)(t)$ pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$. Autrement dit, Af est continue après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle (la convolution par g "régularise" f). Donc A n'est pas surjective. Montrons que A est injective $\Leftrightarrow c_n(g) \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Supposons $c_n(g) \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Alors $Af = 0 \Leftrightarrow c_n(Af) = c_n(g)c_n(f) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow c_n(f) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f = 0$. Donc A est injective. Réciproquement, supposons A injective et soit $m \in \mathbb{Z}$. Alors $A\,\varphi_m \neq 0$ et les coefficients de Fourier $c_n(A\varphi_m) = c_n(g)\delta_{nm}$ ne sont pas tous nuls. Donc $c_m(g) \neq 0$.

3. On sait déjà que $\mathrm{Rsp}(A) = \lim_k \|A^k\|^{1/k} \le \|A\|$ (car $\|A^k\| \le \|A\|^k\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$) et $\|A\| \le \|c(g)\|_\infty$ (question 1). Il reste à montrer que $\mathrm{Rsp}(A) \ge \|c(g)\|_\infty$. On peut supposer $\|c(g)\|_\infty > 0$ sans perte de généralité. Soit $0 < \varepsilon < \|c(g)\|_\infty$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|c_m(g)| \ge \|c(g)\|_\infty - \varepsilon$. Il vient :

$$\big\|A^k\varphi_m\big\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|c_n(g)^k c_n(\varphi_m)\big|^2 = \big|c_m(g)\big|^{2k} \ge \big(\big\|c(g)\big\|_\infty - \varepsilon\big)^{2k}$$

   où l'on a utilisé $c_n(\varphi_m) = \delta_{n\,m}\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Or $\|\varphi_m\| = 1$, donc $\|A^k\| \ge \|A^k\varphi_m\| \ge (\|c(g)\|_\infty - \varepsilon)^k$. Mais ε est arbitraire, d'où $\|A^k\| \ge \|c(g)\|_\infty^k$. Ainsi, $\mathrm{Rsp}(A) \ge \|c(g)\|_\infty$. On déduit de ce qui précède que $\mathrm{Rsp}(A) = \|A\| = \|c(g)\|_\infty$.

   Remarque : On peut montrer ce résultat d'une autre manière. Soit $U : f \in X \mapsto c(f) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ l'isomorphisme de Fourier. D'après 1, $\tilde{A} = U \circ A \circ U^{-1}$ est un opérateur de multiplication sur $\ell^2(\mathbb{Z})$: pour tout $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $(\tilde{A}\,c)_n = c_n(g)c_n\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. On a vu en TD (feuille 8, exercice 2) qu'un tel opérateur est normal et de norme $\|\tilde{A}\| = \|c(g)\|_\infty$. Donc A est normal et $\|A\| = \mathrm{Rsp}(A) = \|c(g)\|_\infty$.