Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 Université J. Fourier

2006-2007

Corrigé du devoir surveillé du 6 novembre

Exercice 1.

1. $X = c_c(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{N})$: si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites s'annulant à partir d'un certain rang ($a_n = 0$ pour $n \geq N_a$ et $b_n = 0$ pour $n \geq N_b$), alors la suite $a + \lambda b$ s'annule à partir d'un certain rang ($a_n + \lambda b_n = 0$ pour $n \geq \max\{N_a, N_b\}$). De plus, $\|a\| = \max_n |a_n| = \sup_n |a_n| = \|a\|_\infty < \infty$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\|\cdot\|$ est une norme sur X (norme induite) et $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'application $f_m : a \in X \mapsto m\, a_m \in \mathbb{C}$ est clairement linéaire. Elle est bornée car $|f_m(a)| = m|a_m| \leq m\|a\|$ pour tout $a \in X$. Donc $f_m \in X'$ et $\|f_m\|_{X'} \leq m$. En fait $\|f_m\|_{X'} = m$. En effet, en prenant $a = (1, \dots 1, 0 \dots) \in X$ (m premières composantes $= 1$) on trouve $f_m(a) = m$ et $\|a\| = 1$. On a donc $\sup_m \|f_m\|_{X'} = \infty$. D'autre part, pour tout m fixé, $f_m(a) = m\, a_m$ est nul pour $m \geq N_a$, donc $\sup_m |f_m(a)| = \max\{|f_m(a)|; m = 0, \dots, N_a - 1\} < \infty$.

3. Il n'y a pas de contraction avec le théorème de Banach-Steinhaus car $(X, \|\cdot\|)$ n'est pas complet. On peut en effet montrer comme suit que X est dense dans l'espace de Banach $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ des suites tendant vers zéro. Soit $b \in c_0(\mathbb{N})$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit $a_n^{(k)} = b_n$ si $n \leq k$ et $a_n^{(k)} = 0$ si $n > k$. Alors $a^{(k)} \in X$ et $\|a^{(k)} - b\|_\infty = \sup_{n>k} |b_n| \to 0$ quand $k \to \infty$, c-à-d, $a^{(k)} \to b$.

Exercice 2.

1(a). L'application linéaire duale de I est par définition $I^* : g \in Y' \mapsto g \circ I \in X'$. Puisque $I : X \to Y$ est une isométrie bijective, $I(X) = Y$ et $\|I^{-1}(y)\|_X = \|y\|_Y \ \forall\, y \in Y$. Donc pour tout $g \in Y'$,

$$\|I^* g\|_{X'} = \sup_{x\in X} \frac{|g(I(x))|}{\|x\|_X} = \sup_{y\in Y} \frac{|g(y)|}{\|I^{-1}(y)\|_X} = \sup_{y\in Y} \frac{|g(y)|}{\|y\|_Y} = \|g\|_{Y'} \ .$$

Donc I^* est une isométrie. Il est facile de voir que $I^* \circ (I^{-1})^* = (I^{-1})^* \circ I^* = \mathrm{Id}$, donc I^* est une bijection d'inverse $(I^*)^{-1} = (I^{-1})^*$.

1(b). En appliquant l'argument précédent à X', on montre que $I^{**} \equiv (I^*)^* : X'' \to Y''$ est une isométrie bijective. On note $J_X : x \mapsto \varphi_x$ l'injection canonique $X \hookrightarrow X''$ et $J_Y : y \mapsto \psi_y$ l'injection canonique $Y \hookrightarrow Y''$. Pour tout $f \in X'$, $g \in Y'$, $x \in X$ et $y \in Y$, on a $\varphi_x(f) = f(x)$ et $\psi_y(g) = g(y)$, d'où

$$[(J_Y \circ I)(x)](g) = \psi_{I(x)}(g) = g(I(x)) = [I^*(g)](x) = \varphi_x(I^*(g)) = [(I^{**} \circ J_X)(x)](g) \ .$$

Ceci montre que $J_Y = I^{**} \circ J_X \circ I^{-1}$ est une bijection $\Leftrightarrow$ J_X est une bijection. Ainsi, X est réflexif $\Leftrightarrow$ Y est réflexif. Notons que pour prouver cette équivalence, il ne suffit pas de montrer que $X \sim X''$ (c-à-d $\exists$ isométrie bijective $X \to X''$) $\Leftrightarrow$ $Y \sim Y''$ ($\exists$ isométrie bijective $Y \to Y''$).

2(a). Supposons $J(X) \neq X''$. Comme J est une isométrie linéaire, elle transforme le fermé X en un sous-espace fermé $J(X) \subset X''$. En effet, si $J(x_n) \to \varphi$ quand $n \to \infty$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est de Cauchy car $\|J(x_n) - J(x_m)\|_{X''} = \|x_n - x_m\|_X \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$. Donc $\exists\, x \in X$ tel que $x_n \to x$. Il s'ensuit que $J(x_n) \to J(x)$ et $\varphi = J(x) \in J(X)$ par unicité de la limite. $J(X) \subset X''$ étant fermé, il ne peut pas être dense dans X'' (sinon on aurait $J(X) = X''$). Comme dans l'exercice 1 de la feuille de TD N° 3, on en déduit à l'aide du théorème de Hahn-Banach qu'il existe $\psi \in X'''$, $\psi \neq 0$, tel que $\psi|_{J(X)} = 0$.

2(b). On raisonne par l'absurde. Supposons $\psi \in J'(X')$, c-à-d, $\psi = \psi_f$ avec $f \in X'$. D'après 2(a),

$$\psi(\varphi_x) = \psi_f(\varphi_x) = \varphi_x(f) = f(x) = 0$$

pour tout $\varphi_x \in J(X)$ et donc pour tout $x \in X$. On en déduit que $f = 0$. Par conséquent, $\psi = \psi_f = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $\psi \neq 0$.

2(c). On a montré que $J(X) \neq X'' \Rightarrow J'(X') \neq X'''$. Par contraposée, X' est réflexif $\Rightarrow X$ est réflexif.

3. Réciproquement, si X est réflexif, alors J est une isométrie bijective $X \to X''$ et donc X'' est réflexif d'après 1(b). Il découle alors de 2(c) que X' est réflexif.

Exercice 3.

1. I est clairement linéaire et pour tout $a \in \ell^1(\mathbb{N})$, $\|I(a)\| = \|\sum_n a_n x_n\| \leq \sum_n |a_n| \|x_n\| \leq \|a\|_1$ car $\|x_n\| \leq 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ($x_n \in \overline{B}_1$). Donc I est une application linéaire bornée et $\|I\| \leq 1$.

2. Soit $x \in X$, $\|x\| = 1$. On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exists\ p(0), p(1), \ldots, p(k) \in \mathbb{N}$ tels que
$$\Big\| \underbrace{x - \sum_{i=0}^{k} 2^{-i} x_{p(i)}}_{y_k} \Big\| \leq 2^{-k-1} \,. \tag{1}$$
Il est clair que (1) est vrai pour $k = 0$: comme $x \in \overline{B}_1$, cela découle de la densité de $\{x_n\}$ dans $\overline{B}_1$. Supposons la propriété (1) vraie pour k et montrons qu'elle reste vraie pour $k+1$. L'inégalité (1) implique $2^{k+1} y_k \in \overline{B}_1$. Par densité de $\{x_n\}$ dans $\overline{B}_1$, il existe $p(k+1) \in \mathbb{N}$ tel que $\|2^{k+1} y_k - x_{p(k+1)}\| \leq 1/2$, c'est-à-dire, $\|y_{k+1}\| \leq 2^{-k-2}$. D'où le résultat.

3. Soit $x \in X$. On cherche $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ tel que $x = I(b)$. Supposons $\|x\| = 1$ dans un premier temps. En prenant la limite $k \to \infty$ dans l'inégalité (1), on obtient :
$$x = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} x_{p(i)} = I(b) \quad \text{avec} \quad b_n = \sum_{i \in \mathbb{N}\,,\, p(i) = n} 2^{-i} \quad (b_n = 0 \text{ si } n \notin p(\mathbb{N})), \tag{2}$$
où la première série converge en norme dans X. Comme
$$\|b\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}\,,\, p(i)=n} 2^{-i} = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} = 2 \ < \ \infty \,,$$
on a bien $b \in \ell^1(\mathbb{N})$. Si $\|x\| \neq 1$ et $x \neq 0$, on applique les arguments ci-dessus à $\widetilde{x} = x/\|x\|$ pour obtenir $\widetilde{x} = I(\widetilde{b})$ puis $x = I(\|x\|\widetilde{b})$ avec $\|x\|\widetilde{b} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Si $x = 0$, alors $x = I(0)$. En conclusion, I est surjective.

4. On note $Y = \ell^1(\mathbb{N})/\ker(I)$. Pour tout $[a] \in Y$, $\mathcal{I}([a]) = I(a)$ est bien défini (car indépendant du représentant choisi : si $a \sim b$ alors $\exists\, c \in \ker(I)$ tel que $a = b + c$, d'où $\mathcal{I}([a]) = I(b) + I(c) = \mathcal{I}([b])$). Par construction, $\mathcal{I} : Y \mapsto X$ est injective et linéaire; $\mathcal{I}$ est de plus surjective car I l'est (question 3). Donc $\mathcal{I}$ est une bijection. Il reste à montrer qu'elle est bornée. Rappelons que la norme sur Y est $\|[a]\|_1 = \inf_{c \in \ker(I)} \|a - c\|_1$. Pour tout $[a] \in Y$ et $c \in \ker(I)$,
$$\|\mathcal{I}([a])\|_X = \|I(a)\|_X = \|I(a-c)\|_X \leq \|a - c\|_1 \quad (\text{car } \|I\| \leq 1 \text{ d'après 1}).$$
Le membre de gauche de l'inégalité étant indépendant de c, on obtient $\|\mathcal{I}([a])\|_X \leq \|[a]\|_1$ en prenant l'inf. sur tous les $c \in \ker(I)$ dans le membre de droite. Ainsi, $\mathcal{I}$ est bornée et $\|\mathcal{I}\| \leq 1$.

5. Soit $x \in X$, $\|x\| = 1$. L'identité (2) est toujours vraie si l'on remplace 2 par $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, à condition de définir une autre application $p_l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que l'on construit par récurrence comme à la question 2. Notons $b^{(l)}$ la suite b obtenue en remplaçant 2 par l et p par p_l dans (2). Alors $x = I(b^{(l)})$. Supposons $x = I(a)$ avec $a \in \ell^1(\mathbb{N})$. Alors $0 = I(a) - I(b^{(l)}) = I(a - b^{(l)})$ donc $c^{(l)} = a - b^{(l)} \in \ker(I)$. D'où
$$\|[a]\|_1 \leq \|a - c^{(l)}\|_1 = \|b^{(l)}\|_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} l^{-i} = \frac{l}{l-1} \,. \tag{3}$$

6. Soit $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ tel que $a \notin \ker(I)$ et $x = I(a)$. On définit $\widetilde{a} = a/\|I(a)\|$ et $\widetilde{x} = I(\widetilde{a})$. Puisque $\|\widetilde{x}\| = 1$, on peut appliquer (3) à $\widetilde{a}$. Cela donne $\|[a]\|_1 \leq \|I(a)\|\, l/(l-1)$. En faisant tendre $l \to \infty$, il vient $\|[a]\|_1 \leq \|I(a)\| = \|\mathcal{I}([a])\|$. Or on a déjà montré plus haut que $\|\mathcal{I}([a])\| \leq \|\mathcal{I}\| \|[a]\|_1 \leq \|[a]\|_1$ (question 4). Il s'ensuit que $\|\mathcal{I}([a])\| = \|[a]\|_1$ et $\mathcal{I} : Y \to X$ est une isométrie.