Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 Université J. Fourier
2005-2006

Corrigé du DS du 26 octobre

Exercice 1. [6=1+2,5+2,5 points]

1. Soit $h \in \mathrm{Lip}_k$, $0 < k \leq 1$. Alors $C = p_k(h) < \infty$ et $|h(t)-h(s)| \leq C|t-s|^k$ pour tout $s,t \in I$ (on obtient cette inégalité par symétrie si $t < s$ et elle est triviale pour $s = t$). Donc $|h(t)-h(s)| \to 0$ quand $t \to s$ et h est continue sur I.

2. Si $h \in \mathrm{Lip}_k$ alors h est bornée sur le compact I d'après 1., d'où $0 \leq \|h\|_\infty = \sup_{t\in I} |h(t)| < \infty$. Comme de plus $0 \leq p_k(h) < \infty$ (par hypothèse), on a bien $\|h\|_{k,\infty} = p_k(h) + \|h\|_\infty \in [0,\infty[$. Puisque $\|.\|_\infty$ est une norme, il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire pour p_k. On l'obtient en prenant le sup sur $s,t \in I$ $(s < t)$ dans les deux membres de l'inégalité
$$\frac{|h_1(t)+h_2(t)-h_1(s)-h_2(s)|}{|t-s|^k} \leq \frac{|h_1(t)-h_1(s)|}{|t-s|^k} + \frac{|h_2(t)-h_2(s)|}{|t-s|^k}$$
avec $h_1, h_2 \in \mathrm{Lip}_k$. Finalement, on a $\|h\|_{k,\infty} \Rightarrow \|h\|_\infty = 0 \Rightarrow h = 0$ et on vérifie facilement que $\|h\|_{k,\infty} = |\lambda|\|h\|_{k,\infty}$ si $\lambda \in \mathbb{C}$. .

3. Montrons que l'espace vectoriel normé $(\mathrm{Lip_k}, \|.\|_{\mathrm{k},\infty})$ est complet. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathrm{Lip_k}, \|.\|_{\mathrm{k},\infty})$. Alors $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $m,n \geq N \Rightarrow |h_n(t)-h_m(t)| \leq \|h_n - h_m\|_{k,\infty} \leq \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $t \in I$ fixé, $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Cette suite est donc convergente, notons $h(t)$ sa limite. On a :
$$\begin{aligned} p_k(h_n-h) &= \sup_{s,t\in I, s<t}\left\{\lim_{m\to\infty} \frac{|h_n(t)-h_m(t)-h_n(s)+h_m(s)|}{|t-s|^k}\right\} \\ &\leq \sup_{m\geq n}\left\{\sup_{s,t\in I,s<t} \frac{|h_n(t)-h_m(t)-h_n(s)+h_m(s)|}{|t-s|^k}\right\} \leq \sup_{m\geq n}\big\|h_n-h_m\big\|_{k,\infty} . \end{aligned}$$
Il s'ensuit que $p_k(h_n-h) \to 0$ quand $n \to \infty$. On montre de même (cf. cours) que $\|h_n-h\|_\infty \to 0$ d'où $\|h_n-h\|_{k,\infty} \to 0$. En particulier, $\|h_n\|_{k,\infty} \to \|h\|_{k,\infty}$ (par l'inégailité triangulaire) et puisque $(\|h_n\|_{k,\infty})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|.\|_{k,\infty}$) on a bien $\|h\|_{k,\infty} < \infty$ d'où $h \in \mathrm{Lip}_k$.

Exercice 2. [8=2,5+1,5+3+1 points]

1. Soit $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $(c_0(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$ convergeant vers a. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on écrit $a^{(k)} = (a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots a_n^{(k)}, \cdots)$. Alors $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$, $|a_n^{(k)} - a_n| \leq \|a^{(k)} - a\|_\infty \leq \varepsilon \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. On peut prendre la limite $n \to \infty$ (avec k fixé) dans cette inégalité (en d'autres termes, on peut inverser les limites $k \to \infty$ et $n \to \infty$ car la convergence des $a_n^{(k)}$ vers a_n est uniforme en n). Puisque $a_n^{(k)} \in c_0(\mathbb{N})$, $a_n^{(k)} \to 0$ et l'on obtient $\limsup_{n\to\infty} |a_n| \leq \varepsilon$. Ceci prouve que $a_n \to 0$ et donc $a \in c_0(\mathbb{N})$.
Variante : L'ensemble $M = \{a \in \ell^\infty(\mathbb{N}); \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existe }\}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace vectoriel normé. Pour cette norme, la forme linéaire $\varphi : a \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ sur M est bornée et donc continue. Il en découle que $c_0(\mathbb{N}) = \varphi^{-1}(0) \subset M$ est fermé pour $\|.\|_\infty$.

2. Soit $b \in \ell^1(\mathbb{N})$. Alors
$$|\varphi_b(a)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq \|a\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \|a\|_\infty \|b\|_1 \quad \forall\, a \in c_0(\mathbb{N}) .$$
On en déduit que φ_b est bornée (et donc bien définie) sur $(c_0(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$ et que $\|\varphi_b\| \leq \|b\|_1$. Or φ_b est clairement linéaire, donc $\varphi_b \in c_0(\mathbb{N})'$.

3. Soit $\varphi \in c_0(\mathbb{N})'$. On pose $\varphi(e_n) = b_n$ avec $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \in c_0(\mathbb{N})$ (1 en n-ième position). En vertu de la linéarité et de la continuité de φ,

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in c_0(\mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad \varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(e_n) = \varphi_b(a)$$

(la série de gauche converge pour la norme $\|.\|_\infty$ car $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$). Il reste à montrer que $b \in \ell^1(\mathbb{N})$. On choisit :

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{\overline{b}_n}{|b_n|} & \text{si } n \leq k \text{ et } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $a^{(k)} \in c_0(\mathbb{N})$ et $\|a^{(k)}\|_\infty = 1$. Comme φ est bornée, il vient :

$$\varphi\big(a^{(k)}\big) = \sum_{n=0}^{k} |b_n| \; \leq \; \|\varphi\| \; < \; \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

d'où $b \in \ell^1(\mathbb{N})$. L'unicité de b découle de $\varphi_b(e_n) = \varphi(e_n) = b_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

4. D'après l'inégalité précédente on a $\|b\|_1 \leq \|\varphi_b\|$. On a montré l'inégalité inverse en 2., donc $\|b\|_1 = \|\varphi_b\|$. Ainsi $\mathcal{J} : b \in \ell^1(\mathbb{N}) \mapsto \varphi_b \in c_0(\mathbb{N})'$ est une isométrie surjective (d'après 3.). On peut donc identifier $c_0(\mathbb{N})'$ avec $\ell^1(\mathbb{N})$ et l'on a $c_0(\mathbb{N})'' = \ell^1(\mathbb{N})' = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Mais $c_0(\mathbb{N})$ est strictement inclus dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, donc $c_0(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.

Exercice 3. [8=2+3+3 points]

1. Soit $f \in L^\infty([0,1])$ et $g \in X = L^2([0,1])$. Alors

$$\|M_f(g)\|_X^2 = \int_0^1 |f(t)g(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \|f\|_{L^\infty}^2 \int_0^1 |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \|f\|_{L^\infty}^2 \|g\|_X^2 \; .$$

Donc $M_f : g \mapsto fg$ est une application $X \to X$, qui est manifestement linéaire et est bornée. De plus, $\|M_f\| \leq \|f\|_{L^\infty}$.

2. Pour montrer que $\|M_f\| = \|f\|_{L^\infty}$, il suffit de trouver une suite de fonctions $g_n \in X$ vérifiant :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|f g_n\|_X}{\|g_n\|_X} \geq \|f\|_{L^\infty} \; .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $\|.\|_{L^\infty}$, $\exists\; \Omega_n \subset [0,1]$ de mesure $|\Omega_n| > 0$ tel que $|f(t)| \geq \|f\|_{L^\infty} - 1/n$ pour tout $t \in \Omega_n$. On pose :

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_n|}} & \text{si } t \in \Omega_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\|g_n\|_X^2 = |\Omega_n|^{-1} \int_{\Omega_n} \mathrm{d}t = 1$ et

$$\frac{\|f g_n\|_X}{\|g_n\|_X} = \|f g_n\|_X = \left(\frac{1}{|\Omega_n|} \int_{\Omega_n} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2} \; \geq \; \|f\|_{L^\infty} - 1/n \; .$$

Le sup sur n du membre de gauche est donc plus grand ou égal à $\|f\|_{L^\infty}$, d'où $\|M_f\| = \|f\|_{L^\infty}$. Ceci montre que l'application linéaire $\mathcal{I} : f \in L^\infty([0,1]) \mapsto M_f \in \mathcal{L}(X)$ est une isométrie. Ainsi, on peut identifier $L^\infty([0,1])$ avec $\mathcal{I}(L^\infty([0,1])) \subset \mathcal{L}(X)$.

3. (a) Soit $E = C([0,1])$. On sait que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet et donc fermé. Comme $\mathcal{I}$ est une isométrie et puisque $\|g\|_\infty = \|g\|_{L^\infty}$ pour toute fonction continue $g \in E$, on en déduit que $\mathcal{I}(E)$ est fermé dans $(\mathcal{L}(X), \|.\|)$.

(b) Soit $f \in L^\infty([0,1])$. Alors $|f(t)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ pour presque tout t, c'est-à-dire, pour tout $t \in [0,1] \setminus A$ avec $A \subset [0,1]$ de mesure nulle. On définit la fonction sur $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{C}$ par :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \notin A \\ 0 & \text{si } t \in A\,. \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction mesurable bornée telle que $\|\tilde{f}\|_\infty = \sup_{t\in I} |\tilde{f}(t)| \leq \|f\|_{L^\infty}$. On sait qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C([0,1])$ vérifiant $|f_n(t)| \leq \|\tilde{f}\|_\infty$ pour tout $t \in [0,1]$ et $f_n(t) \to \tilde{f}(t)$ pour presque tout t (c'est une conséquence du théorème de Lusin affirmant que si $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, h \in C([0,1])$ tel que $\|h\|_\infty \leq \|\tilde{f}\|_\infty$ et l'ensemble $\{t \in [0,1]; h(t) \neq \tilde{f}(t)\}$ est de mesure plus petite que ε).
Soit $g \in L^2([0,1])$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(t)g(t)|^2 = |\tilde{f}(t)g(t)|^2 = |f(t)g(t)|^2 \qquad \text{pour presque tout } t \in [0,1].$$

De plus, $|f_n(t)g(t)|^2 \leq \|f\|_{L^\infty}^2 |g(t)|^2$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t)g(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)g(t)|^2 \mathrm{d}t\,.$$

Donc $\|M_{f_n}(g)\|_{L^2} \to \|M_f(g)\|_{L^2}$ quand $n \to \infty$.