Master 1 Mathématiques, Analyse Fonctionnelle
2015-2016

Université Grenoble Alpes

Examen du 21 juin 2016 (seconde session)

Les notes de cours et de TD sont autorisées à l'exclusion de tout autre document.
Le sujet comporte 3 exercices. On conseille de faire l'exercice 1 avant l'exercice 3.
Durée : 3 heures

Dans tout ce qui suit, $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace de Banach. On note $(X', \|\cdot\|_{X'})$ son espace de Banach dual, $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés $X \to X$ et $1_X \in \mathcal{L}(X)$ l'opérateur identité.

Exercice 1 Soit $E \subset X$ un sous-espace vectoriel de X et $G \subset X'$ un sous-espace vectoriel de X'. On note $\overline{E}$ l'adhérence de E dans $(X, \|\cdot\|_X)$ et $\overline{G}$ l'adhérence de G dans $(X', \|\cdot\|_{X'})$. On définit

$$\begin{aligned} E^\perp &= \big\{ f \in X' ;\ f(x) = 0 \ \ \forall\, x \in E \big\} \\ G^\perp &= \big\{ x \in X\ ;\ g(x) = 0 \ \ \forall\, g \in G \big\} . \end{aligned}$$

1. Montrer que $E^\perp$ et $G^\perp$ sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $\overline{E}^\perp = E^\perp$ et $\overline{G}^\perp = G^\perp$.
   Soit E_0 l'adhérence de E pour la topologie faible $\sigma(X, X')$ et G_0 l'adhérence de G pour la topologie $*$-faible $\sigma(X', X)$. Y a t'il égalité entre $E_0^\perp$ et $E^\perp$? Même question pour $G_0^\perp$ et $G^\perp$.
3. Montrer que dans le cas particulier où X est un espace de Hilbert, on retrouve les définitions usuelles de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel : plus précisemment, vous vérifierez que
   $$\mathcal{I}^{-1}(E^\perp) = (\mathcal{I}(E))^\perp = \{ y \in X\ ;\ \langle y, x\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in E \} ,$$
   où $\mathcal{I} : y \in X \mapsto f_y \in X'$ est l'isométrie définie par $f_y(x) = \langle y, x \rangle$ pour tout $x, y \in X$.
4. Montrer que $G^\perp$ est un fermé de $(X, \|\cdot\|_X)$ et que $E^\perp$ est un fermé de $(X', \|\cdot\|_{X'})$.
5. Soit $F \subset X$ un autre sous-espace vectoriel de X. Vérifier que $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$.
6. Montrer que $(E^\perp)^\perp = \overline{E}$.
   Indication : pour prouver que $(E^\perp)^\perp \subset \overline{E}$ si $\overline{E} \neq X$, vous pourrez utiliser le résultat suivant que vous justifierez : pour tout $x_0 \in X \setminus \overline{E}$, il existe $f_0 \in X'$ telle que $f_0(x_0) = 1$ et $f_0(x) = 0 \ \forall\, x \in E$.
7. On suppose que X est réflexif. Montrer que $(G^\perp)^\perp = \overline{G}$.
8. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. On note $A' \in \mathcal{L}(X')$ l'opérateur dual de A. Montrer que
   $$\ker(A') = [\mathrm{Im}(A)]^\perp \quad , \quad \ker(A) = [\mathrm{Im}(A')]^\perp .$$
   En déduire que $\ker(A')^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)}$ et que, si X est réflexif, alors $\ker(A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A')}$

Exercice 2 Soit $P \in \mathcal{L}(X)$ un projecteur non nul et distinct de l'identité 1_X.

1. Montrer que pour tout $\lambda \notin \{0, 1\}$, $\lambda 1_X - P$ est injectif.
2. Montrer que pour tout $\lambda \notin \{0, 1\}$, $\lambda 1_X - P$ est surjectif.
3. Montrer que P n'a pas de spectre continu ni de spectre résiduel et a deux valeurs propres 0 et 1, c'est-à-dire,
   $$\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\} .$$

Exercice 3 Pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$ et tout $N \in \mathbb{N}^\star$, on considère la somme :

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A^n \; .$$

(avec $A^n = \underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{n \text{ fois}}$ pour $n \geq 1$ et $A^0 = 1_X$). Dans tout l'exercice, on suppose que

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty \; . \tag{1}$$

1. Montrer que $\sup\limits_{N \in \mathbb{N}^\star} \|S_N\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. En déduire que $S_N \in \mathcal{L}(X)$ et que
$$\lim_{N \to \infty} \|AS_N - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{N \to \infty} \|S_N A - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 0 \; .$$
2. Montrer que
$$Y = \left\{ y \in X \; ; \; \lim_{N \to \infty} S_N \, y \quad \text{existe} \right\}$$
est un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> de X.
3. Pour tout $y \in Y$, on définit $Py = \lim\limits_{N \to \infty} S_N \, y$.
Soit $F = \ker(A - 1_X) = \{x \in X \; ; \; Ax = x\} \subset X$ le sous-espace vectoriel des points fixes de A.
   (a) Montrer que P est une application linéaire bornée $Y \to X$, de norme $\|P\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M$.
   (b) Montrer que $F \subset Y$ et que P a pour image $\mathrm{Im}(P) = P(Y) = F$.
   (c) Montrer que P est un projecteur vérifiant $AP = PA = P$.
4. Soit $H = \overline{\mathrm{Im}(A - 1_X)}$. Montrer que $H \subset Y \cap \ker(P)$ (on se servira des résultats de la question 1).
5. Soit $F' = \ker(A' - 1_{X'}) \subset X'$ l'espace vectoriel des points fixes de l'application duale A' de A. Montrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :
   (i) $y \in H$;
   (ii) $y \in Y$ et $Py = 0$;
   (iii) $f(y) = 0$ pour tout $f \in F'$.
Indication : Pour prouver (iii) $\Rightarrow$ (i), on pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.
6. Déduire des questions précédentes que $Y = F \oplus H$.
7. On suppose que X est réflexif.
   (a) En s'aidant des résultats obtenus à l'exercice 1, montrer que $Y^\perp = H' \cap F'$ où $H' = \overline{\mathrm{Im}(A' - 1_{X'})}$.
   (b) En déduire que $Y^\perp = \{0_{X'}\}$ (ici $0_{X'}$ est la forme linéaire nulle sur X').
   (c) En conclure que $Y = X$.
8. Soit $x \in X$, X non nécessairement réflexif. On définit l'enveloppe convexe de $\{x, Ax, A^2x, \ldots\}$ par :
$$C_x = \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} t_m A^m x \; ; \; M \in \mathbb{N}^\star, (t_0, \ldots, t_{M-1}) \in \mathbb{R}_+^M \, , \; \sum_{m=0}^{M-1} t_m = 1 \right\} \subset X \; .$$
Démontrer que les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :
   (I) $y \in Y$ et $z = Py$;
   (II) la suite $(S_N y)_{N \in \mathbb{N}^\star}$ admet une sous-suite convergeant faiblement vers z ;
   (III) $\overline{C_y} \cap F \neq \emptyset$ et $z \in \overline{C_y} \cap F$.
Peut-on utiliser l'équivalence (I) $\Leftrightarrow$ (II) pour retrouver le résultat de la question 7 dans le cas particulier où X est réflexif ?
Indications : Pour montrer que (II) $\Rightarrow$ (III), utiliser le fait que tout sous-ensemble convexe fortement fermé de X est faiblement fermé. Pour prouver (III) $\Rightarrow$ (I), généraliser la question 1 en montrant que $\lim\limits_{N \to \infty} \|S_N A^n - S_N\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\lim\limits_{N \to \infty} \|S_N u - S_N y\| = 0$ si $u \in C_y$.