Master 1 “Mathématiques, Informatique”, MAT403 — Université J. Fourier, 2007-2008

Devoir surveillé N^o 2, lundi 17 décembre 2007

Documents autorisés (à l'exclusion de tout autre document) : *notes de cours et de travaux dirigés.*
Durée : **2 heures.**

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (classes d'équivalences de) fonctions de $L^1([0,1])$ définies par :

$$f_n(t) = 1 + \sin(2\pi nt) \quad , \quad 0 \le t \le 1 \; .$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $f = 1$.
2. Montrer que $\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$ quand $n \to \infty$ mais que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente pour la norme $\|.\|_{L^1}$.
3. Peut-on trouver une suite de fonctions dans $L^2([0,1])$ satisfaisant toutes les propriétés énoncées dans les questions 1 et 2 ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit $(X, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'algèbre de Banach des applications linéaires bornées $X \to X$ (on rappelle que $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\limits_{x\in X, \|x\|=1} \|Ax\|$, $A \in \mathcal{L}(X)$).
Pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$, on pose

$$|||A||| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \big|(Ax|x)\big| \; .$$

1. Montrer que $|||\cdot|||$ définit une norme d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(X)$ et que $|||A||| \le \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.
2. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur *auto-adjoint.*
   (a) Montrer que si $x \in X$ et $y \in X$ sont tels que $\|x\| = \|y\| = 1$, alors

   $$\mathrm{Re}(y|Ax) \le |||A||| \; .$$

   Indication : Utiliser une identité de polarisation et l'identité du parallélogramme.
   (b) En déduire que $|||A||| = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$.
3. Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné quelconque et A^* son adjoint.
   (a) Montrer que $\frac{1}{2}(A + A^*)$ et $\frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*)$ sont des opérateurs auto-adjoints.
   (b) En déduire en utilisant la question 2 que

   $$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \le 2|||A||| \quad \forall\ A \in \mathcal{L}(X) \; . \tag{1}$$

   En conclure que les normes $|||\cdot|||$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ sur $\mathcal{L}(X)$ sont équivalentes.
   (c) Montrer que si $\dim(X) \ge 2$, la constante 2 dans l'inégalité (1) ne peut pas être remplacée par une constante plus petite.
   Indication : considérer l'application linéaire $A : X \to X$ définie par :

   $$\begin{cases} A(\lambda x + \mu y) & = \lambda y \ \ \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \\ Az & = 0 \quad \forall\ z \in \{x, y\}^\perp \end{cases} ,$$

   avec $x \in X$ et $y \in X$ deux vecteurs orthogonaux de norme 1.

Exercice 3. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. On note $f(\cdot - a) \in L^\infty(\mathbb{R})$ la fonction translatée de f par $a \in \mathbb{R}$ ($[f(\cdot - a)](t) = f(t-a)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que si $f(t) = \tilde{f}(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ avec $\tilde{f}$ continue, alors
$$\big\| f - f(\cdot - a) \big\|_{L^\infty} = \sup \mathrm{ess}_{t\in\mathbb{R}} \, \big| f(t) - f(t-a) \big| \to 0 \quad \text{quand} \quad a \to 0 \, . \tag{2}$$

2. On veut démontrer la réciproque. On suppose que (2) est vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction 2π-périodique définie par $g_n(t) = 2\pi n e^{-nt} \;\; \forall\, t \in [0, 2\pi[$, et
$$f * g_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-s) g_n(s) \,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \, .$$
   (a) Montrer que $\|f * g_n - f\|_{L^\infty} \to 0$ quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(f * g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément equicontinue (c'est-à-dire : $\forall\, \varepsilon > 0,\;\; \exists\, \eta > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, (t,t') \in \mathbb{R}^2$, $|t - t'| \le \eta \Rightarrow |f * g_n(t) - f * g_n(t')| \le \varepsilon$) et uniformément borné (c'est-à-dire $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f * g_n\|_\infty < \infty$).
   (c) En déduire qu'il existe une fonction $\tilde{f}$ continue telle que $f(t) = \tilde{f}(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.
   Indication : on rappelle que toute suite uniformément equicontinue et uniformément bornée de fonctions sur $[0, 2\pi]$ admet une sous-suite uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$ (théorème d'Ascoli).