Master 1 "Mathématiques, Informatique", MAT403 Université J. Fourier
2005-2006

Devoir surveillé N^o 1, mercredi 26 octobre 2005

Documents autorisés (à l'exclusion de toute autre document) : *notes de cours et de travaux dirigés.*
Durée : *2 heures.*

Exercice 1. Soit $a < b$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $0 < k \leq 1$. On note $\mathrm{Lip_k}$ l'espace vectoriel des fonctions $h : I \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$p_k(h) = \sup_{s,t \in I, s<t} \frac{|h(t) - h(s)|}{|t - s|^k} < \infty$$

(fonctions k-lipschitziennes).

1. Montrer que si $h \in \mathrm{Lip_k}$, alors h est continue sur I.
2. Montrer que
$$\|h\|_{k,\infty} = p_k(h) + \sup_{t \in I} |h(t)|$$
définit une norme sur $\mathrm{Lip_k}$.
3. Montrer que $(\mathrm{Lip_k}, \|.\|_{\mathrm{k},\infty})$ est un espace de Banach.

Exercice 2. On considère le sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ défini par :

$$c_0(\mathbb{N}) = \left\{a \in \ell^\infty(\mathbb{N}); \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\} .$$

1. Montrer que $c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace *fermé* de $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$.
2. Soit $b \in \ell^1(\mathbb{N})$. Vérifier que l'application $\varphi_b : c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ définie par :
$$\varphi_b(a) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n \quad , \quad a \in c_0(\mathbb{N})$$
est une forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$.
3. Montrer que pour tout φ dans le dual $c_0(\mathbb{N})'$ de $c_0(\mathbb{N})$, il existe une unique suite $b \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que $\varphi_b = \varphi$.
4. L'espace $c_0(\mathbb{N})$ est-il réflexif ?

Exercice 3. Soit $X = L^2([0, 1])$ (muni de la norme $\|.\|_{L^2}$) et $(\mathcal{L}(X), \|.\|_{\mathcal{L}(X)})$ l'espace de Banach des applications linéaires bornées de X dans X.
On associe à tout $f \in L^\infty([0, 1])$ une application linéaire $M_f : X \to X$ définie par :

$$M_f(g) = fg \quad , \quad g \in X .$$

1. Vérifier que $M_f \in \mathcal{L}(X)$.
2. Montrer que $\|M_f\|_{\mathcal{L}(X)} = \|f\|_{L^\infty}$. En déduire que l'application linéaire
$$\mathcal{I} : \begin{cases} L^\infty([0, 1]) & \to \mathcal{L}(X) \\ f & \mapsto M_f \end{cases}$$
est une isométrie. Ainsi, on peut identifier $L^\infty([0, 1])$ avec $\mathcal{I}(L^\infty([0, 1])) \subset \mathcal{L}(X)$.

3. Soit $E = C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

   (a) Le sous-espace $\mathcal{I}(E)$ est-il fermé dans $\mathcal{L}(X)$?

   (b) Montrer que pour tout $f \in L^\infty([0,1])$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que, pour tout $g \in X$, la suite $(M_{f_n}(g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M_f(g)$ dans $(X, \|.\|_{L^2})$.

   Indication : On pourra montrer au préalable qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$.