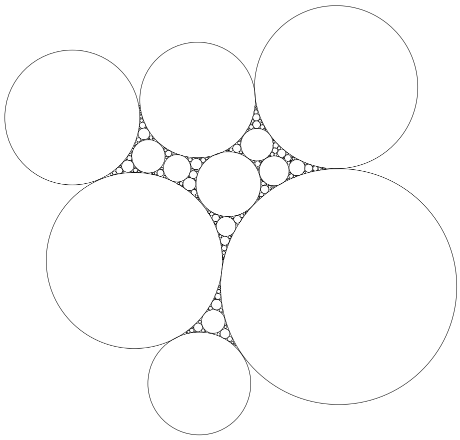
Le plan est-il pavable par des disques ?

CHARLOT Grégoire & JOLY Romain

Quand on voit un dessin comme celui-ci :



il vient à l'esprit la question suivante.
Peut-on paver complètement tout le plan avec des disques de rayon non nul ?
Le but de cette note est de donner une réponse négative à cette question.

Définition 1. *Soit $\mathcal{F} = \{F_i,\ i \in I\}$ une famille de fermés de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. On dira que $\mathcal{F}$ est un* **empilage** *si pour tous i et j dans I, $i \neq j$ implique que $F_i \cap F_j \subset \partial F_i$, c'est-à-dire que les fermés de l'empilage sont disjoints, sauf peut-être sur leur frontière. On dit que $\mathcal{F}$ est un pavage si c'est un empilage et que $\cup_i F_i = \mathbb{R}^d$.*
Soient $\mathcal{F}$ un empilage et $x \in \mathbb{R}^d$. On dira que x est un point de contact si x appartient à au moins deux F_i distincts et que x est un vide si x n'appartient à aucun des F_i.

On peut montrer de façon générale qu'on ne peut paver par des boules à peu près tout objet non vide, sauf par des empilages triviaux. Pour simplifier, on va se limiter au résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{F} = \{F_i,\ i \in I\}$, différent de $\{\mathbb{R}^d\}$, un empilage de fermés strictement convexes d'intérieur non vide. Alors $\mathcal{F}$ possède un nombre indénombrable de vides.*

La démonstration de ce résultat peut se faire en utilisant un corollaire connu du théorème de Baire.

Proposition 3. *L'intervalle* $[0,1]$ *n'est pas une union d'un nombre dénombrable de fermés disjoints dont au moins deux sont non vides.*

Démonstration : On raisonne par l'absurde et on suppose que $[0,1] = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec F_n des fermés disjoints et on suppose que F_1 et F_2 sont non vides. Notons que par connexité de $[0,1]$, la frontière de F_1 dans $[0,1]$ est non vide (car sinon F_1 serait un ouvert fermé non vide de $[0,1]$ et serait donc tout $[0,1]$). Soit $G = [0,1] \setminus \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n\right)$. L'ensemble G est fermé dans $\mathbb{R}$ comme complémentaire d'un ouvert. De plus, on obtient facilement que $G = \cup_n \partial F_n$, ce qui montre que G est non vide car ∂F_1 est non vide.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que ∂F_n est un fermé d'intérieur vide dans G. Tout d'abord, c'est un fermé de G car un fermé de $\mathbb{R}$. Ensuite, soit $x \in \partial F_n$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la frontière, il existe $y \in I =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [0,1]$ qui n'est pas dans F_n. Ce point y est donc dans un F_m avec $n \neq m$. Or F_m possède une frontière dans I puisque I est connexe, $F_m \cap I$ fermé dans I et F_m ne recouvre pas tout I (puisque $x \in F_n \cap I$ et F_n et F_m sont supposés disjoints). Donc $\partial F_m \cap I \neq \emptyset$ et $I \cap \partial F_n \neq I \cap G$. Donc ∂F_n est d'intérieur vide dans G.

Comme G est fermé dans $\mathbb{R}$, il est complet. Or $\cup \partial F_n$ est une union de fermés de G d'intérieur vide dans G et est donc d'intérieur vide dans G par le théorème de Baire... mais c'est absurde puisque c'est tout G ! $\square$

Démonstration du Théorème 2 : Tout d'abord, notons que la famille $\mathcal{F}$ est dénombrable. En effet, l'intérieur de chaque F_i est non vide et a donc un certain volume strictement positif. Comme les intérieurs sont disjoints, il y en a au plus un nombre dénombrable dans chaque boule de centre 0 et de rayon $N \in \mathbb{N}$. Au total, il y a donc un nombre au plus dénombrable de F_i. Comme les F_i sont strictement convexes et d'intérieur disjoints, ils ne peuvent s'intersecter qu'en au plus un point. Il y a donc au plus un nombre dénombrable de points de contact.
Comme $\mathcal{F}$ n'est pas $\{\mathbb{R}^d\}$, il y a au moins deux ensembles non vides dans $\mathcal{F}$, disons F_1 et F_2. Soient $x \in \overset{\circ}{F}_1$ et y $\overset{\circ}{F}_2$. Il y a un nombre indénombrable de chemins reliant x et y qui sont disjoints sauf bien sûr en x et y. Il suffit de regarder les trajets allant linéairement de x à a puis de a à y où a est un point de la médiatrice de $[x,y]$. On peut donc trouver un chemin (en fait une infinité) allant de x à y sans passer par aucun des points de contacts puisque ceux-ci sont en nombre dénombrable. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ avec $f(0) = x$ et $f(1) = y$ un tel chemin et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vides de l'empilage. Alors $[0,1] = (\cup_i f^{-1}(F_i)) \cup (\cup_{x\in\mathcal{V}} f^{-1}(\{x\}))$ est une partition de $[0,1]$ en fermés disjoints dont au moins deux sont non vides. D'après la proposition 3, le cardinal de $\mathcal{V}$ doit donc être indénombrable. $\square$