Chapitre 6 : Compacité

1 Les compacts

1.1 Définitions

Dans ce cours, nous allons utiliser la notion suivante de compacité. Celle-ci est ce qu'on appelle la *compacité séquentielle*, c'est-à-dire caractériser par les suites. La définition qui est plus générale est celle par les recouvrements qui apparaît dans la proposition qui suit, qui n'est pas en général la même que la compacité séquentielle. Mais dans les espaces vectoriels normés, les deux définitions sont équivalentes et on peut utiliser l'une comme l'autre.

Définition 6.1

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble $K \subset E$ est dit (séquentiellement) **compact** si pour toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite dans K. Autrement dit, toute suite de K a au moins une valeur d'adhérence dans K.

Théorème 6.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass)

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble $K \subset E$ est compact si et seulement si de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini, c'est-à-dire que si $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ est une famille d'ouverts de E telle que $K \subset (\cup_j \mathcal{O}_j)$, alors il existe $j_1,\ldots, j_p$ tels que $K \subset (\mathcal{O}_{j_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{j_p})$.

Démonstration : Soit $K \subset E$ un ensemble dont on peut extraire un recouvrement fini de tout recouvrement par des ouverts. Soit (u_n) une suite dans K. Imaginons que (u_n) n'ait pas de valeur d'adhérence dans K. Alors la proposition 3.49 nous dit que $\cap_N \overline{\cup_{n\geq N}\{u_n\}}$ est disjointe de K. Donc en particulier, son complémentaire $\cup_N \left(\overline{\cup_{n\geq N}\{u_n\}}\right)^C$ est une union d'ouverts (car complémentaires de fermés) qui recouvre K. On peut donc en extraire un recouvrement fini avec les indices $N_1 < N_2 < \ldots < N_p$ et, en passant au complémentaire, on obtient que

$$K \text{ disjoint de } \overline{\cup_{n\geq N_1}\{u_n\}} \cup \ldots \cup \overline{\cup_{n\geq N_p}\{u_n\}} = \overline{\cup_{n\geq N_p}\{u_n\}}\ .$$

Mais c'est absurde car $\overline{\cup_{n\geq N_p}\{u_n\}}$ contient des éléments de la suite qui sont dans K. Donc (u_n) a bien au moins une valeur d'adhérence dans K.

Réciproquement, supposons que K est séquentiellement compact. Soit $(\cup_j \mathcal{O}_j)$ un recouvrement de K par des ouverts. Nous affirmons d'abord qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule $B(x,r)$ avec $x \in K$ est entièrement incluse dans un $\mathcal{O}_j$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors on peut trouver des boules $B(x_n,1/n)$ telles qu'aucune ne soit incluse dans un $\mathcal{O}_j$. Comme K est compact, on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in K$. Comme ℓ est dans K, il doit exister un ouvert $\mathcal{O}_{j_*}$ tel que $\ell \in \mathcal{O}_{j_*}$. Et comme $\mathcal{O}_{j_*}$ est ouvert, il existe une boule $B(\ell,\rho)$ incluse dans $\mathcal{O}_{j_*}$. Par inégalité triangulaire, on voit alors que les boules $B(x_{\varphi(n)},1/\varphi(n))$ finissent par être incluses dans $B(\ell,\rho)$ et donc dans $\mathcal{O}_{j_*}$, ce qui est absurde.
Nous considérons maintenant les boules $B(x,r)$ avec $x \in K$ et $r > 0$ comme ci-dessus. Nous prétendons qu'il est possible de recouvrir K avec un nombre fini de telles boules. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite de points $(x_n) \subset K$ tels que x_n n'est pas dans $\cup_{k\geq n} B(x_k,r)$. Cette suite vérifie par construction que $\|x_p - x_q\| \geq r > 0$ pour tout p et q. Donc on ne pourra jamais extraire une suite de Cauchy de cette suite et donc aucune sous-suite convergente, ce qui est absurde.
Nous pouvons conclure : nous pouvons recouvrir K par un nombre fini de boules $B(x_k,r)$ avec $k = 1,\ldots,p$. Mais chaque $B(x_k,r)$ est entièrement incluse dans un $\mathcal{O}_{j_k}$. Donc les ouverts $\mathcal{O}_{j_k}$ $(k = 1,\ldots,p)$ suffisent à recouvrir tout K.
□

L'intérêt du concept de compacité est assez évident. En effet, nous savons qu'il existe des suites bornées qui ne convergent pas. Mais il arrive qu'on construise une suite et qu'on aimerait qu'elle converge, quitte à ne pas prendre tous les termes de la suite. On peut voir cette démarche dans plusieurs preuves de la fin du chapitre 2 par exemple (théorème des valeurs extrêmes, théorème de Heine...). Si on a bien de la compacité, alors on peut toujours faire la démarche d'extraire une sous-suite convergente, ce qui est très pratique et fournit des théorèmes très puissants comme nous allons le voir. La question est maintenant de savoir quels ensembles sont des compacts.

Proposition 6.3

Un compact K est un fermé borné de E.

Démonstration : Pour nous entraîner à manipuler des deux caractérisations, nous allons faire cette preuve de deux façons différentes : une avec les suites, l'autre avec des manipulations d'ouverts.
Supposons que K est séquentiellement compact. Soit (x_n) une suite de K qui converge vers $\ell \in E$. On peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui a une limite $\ell' \in K$. Mais comme la suite extraite converge aussi vers ℓ, par unicité de la limite, on a $\ell = \ell' \in K$. Ceci montre que la limite ℓ reste dans K et donc

K est fermé. Supposons que K n'est pas borné, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Toute sous-suite de (x_n) aura aussi une norme qui tend vers $+\infty$ et donc aucune sous-suite ne peut converger. Donc K n'est pas compact et par contraposée, si K est compact, il est borné.
Supposons maintenant que K vérifie la caractérisation de la compacité par les recouvrements d'ouverts. Soit $x \notin K$. Pour tout $r > 0$, on note $\mathcal{O}_r = (\overline{B}(x,r))^C$. Comme l'intersection de toutes ces boules se limite au centre x qui n'est pas dans K, on a $K \subset \cup_{r>0}\mathcal{O}_r$. Par hypothèse, on peut trouver un recouvrement fini. Si r_* est le plus petit de tous les rayons du recouvrement fini, alors on a $K \subset \mathcal{O}_{r_*}$. Ceci montre que la boule ouverte $B(x,r_*)$ est dans K^C et donc que K^C est un ouvert. Par complémentaire, K est fermé. Par ailleurs, l'union des boules ouvertes $\cup_n B(0,n)$ étant tout l'espace, c'est un recouvrement de K par des ouverts. Donc on peut le recouvrir par un nombre fini de telles boules et la plus grande de ces boules contient tout K, ce qui montre que K est borné. □

! On fera bien attention à ne pas utiliser le résultat dans le mauvais sens car sa réciproque n'est pas toujours vraie.

1.2 En dimension finie

En dimension finie, comme souvent dans ce cours, les propriétés sont similaires à celles de $\mathbb{R}$ et la réciproque de la proposition 6.3 est vraie.

Théorème 6.4 (Borel-Lebesgue)

Dans un espace de dimension finie, un ensemble K est compact si et seulement s'il est fermé et borné.

Démonstration : Il n'y a que le sens « si » a montrer puisque le « seulement si » est général d'après la proposition 6.3. Tout espace de dimension finie peut se ramener à des coordonnées dans $\mathbb{R}^d$ par le choix d'une base. Par ailleurs, toutes les normes sont équivalentes d'après le théorème 3.54 et donc il suffit de considérer la norme ∞ sur $\mathbb{R}^d$ par exemple. Soit K un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Comme K est borné, la suite (x_n) est bornée et d'après le théorème 3.50, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_d(n)})$ qui converge vers un point x_* dans $\mathbb{R}^d$. Pour finir, il reste à voir que le fait que K soit fermé implique bien que cette limite x_* est dans K. □

En appliquant ce résultat à une boule fermée de $\mathbb{R}^d$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 6.5

De toute suite bornée d'un espace de dimension finie, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exemples :

- Le carré $[0,1]^d$ est un compact de $\mathbb{R}^d$.
- La suite $x_n = (\cos n, \sin n)$ qui est contenue dans le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ admet des sous-suites convergentes. En fait, on peut montrer que ses valeurs d'adhérence forment exactement le cercle unité.

1.3 En dimension infinie

En dimension infinie, il existe toujours des fermés bornés qui ne sont pas compacts. Voici quelques exemples.

Exemples :

- On considère l'espace ℓ^∞ des suites bornées muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. On regarde la suite de suites $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ où u^k est la suite où $u_n^k = 0$ sauf si $k = n$ et alors $u_k^k = 1$. On peut la voir comme la suite de vecteurs avec une infinité de composantes
$$\begin{aligned} u^0 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ u^1 &= (0,1,0,0,\ldots) \\ u^2 &= (0,0,1,0,\ldots) \\ \vdots\ &\quad \vdots \end{aligned}$$
Chaque u^k est de norme 1 et donc la suite (u^k) est bornée. Mais pour tout p et q, on a $\|u^p - u^q\|_\infty = 1$. Donc tous les termes sont éloignés les uns des autres et on ne pourra jamais en extraire une suite de Cauchy. Donc on ne peut en extraire une sous-suite convergente. Cela montre que dans ℓ^∞, la boule unité fermée est un fermé borné qui n'est pas compact.
- On peut reprendre l'exemple ci-dessus dans l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|a_d X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0\| = \max_j |a_j|$ (cf le corollaire 3.18). La suite correspondante est la suite des polynômes $P_n = X^n$ qui sont tous de norme 1 et tous à distance 1 les uns des autres.
- On se place dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infini, qui correspond à la convergence uniforme de fonctions. On considère la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n$, qui sont toutes de norme 1. Les fonctions convergent simplement vers la fonction f_* définie par $f_*(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f_*(1) = 1$. Si on pouvait extraire une sous-suite de fonctions $(f_{\varphi(n)})$ convergeant uniformément, alors celle-ci convergerait aussi simplement et sa limite devrait être f_*. Mais la limite uniforme de fonctions continue est continue et f_* n'est pas continue (on pourra revoir ses cours de L2 pour se rappeler les convergences de suites de fonctions). C'est donc impossible et on ne peut pas extraire une sous-suite convergente de la suite (f_n). On vient de montrer que la boule unité fermé de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infini est un fermé borné qui n'est pas compact.

Pour trouver des compacts dans un espace de dimension infinie, on peut regarder des fermés bornés dans des sous-espaces de dimension finie qui donne alors des compacts. Par exemple, dans l'espace ℓ^∞ des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'ensemble

$$K = \{(u_n) \in \ell^\infty\ ,\ \forall n \leq 10\ ,\ \ |u_n| \leq 1\ \text{ et }\ \forall n \geq 11\ ,\ \ u_n = 0\}$$

est compact. Mais c'est un peu « triché ». Pour donner un exemple de compact de dimension infinie, on va montrer le résultat suivant.

Proposition 6.6

On considère l'espace ℓ^∞ des suites bornées muni de la norme $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. L'ensemble

$$K = \{(u_n) \in \ell^\infty\ ,\ \forall n \geq 0\ ,\ \ |u_n| \leq e^{-n}\}$$

est compact dans ℓ^∞.

Démonstration : Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de K, où chaque u^k est une suite (u_n^k) de ℓ^∞. On applique un argument d'extraction diagonal. On peut extraire de la suite des premières coordonnées une sous-suite $(u_1^{\phi_1(k)})$ qui converge vers u_1^∞ dans $[-1,1]$. Puis de la sous-suite $(u_2^{\phi_1(k)})$, on peut extraire une sous-suite $(u_2^{\phi_1\circ\phi_2(k)})$ qui converge vers $u_2^\infty \in [-e^{-1},e^{-1}]$ et on continue ainsi de suite. On ne peut pas extraire une infinité de fois sous peine de risquer de ne plus avoir de termes restants. Par contre, on peut regarder la suite (v^k) extraire de (u^k) par l'extraction dite « diagonale »

$$v^k = u^{\phi_1\circ\ldots\circ\phi_k(k)}\ .$$

On vérifie que v_n^k converge vers v_n^∞ pour tout n : dès que $k \geq n$, on obtient une suite extraite de l'extraction convergente $u_n^{\phi_1\circ\ldots\circ\phi_n(k)}$ construite ci-dessus. Par définition de K et la convergence de chaque coordonnée, on a forcément $|v_n^\infty| \leq e^{-n}$ et donc v^∞ appartient à K.
Montrons que v^k converge vers v^∞. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-n_0} < \varepsilon/2$. Puis, on choisit k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et $n < n_0$, $|v_n^k - v_n^\infty| < \varepsilon$. Notons que cela est possible car on ne considère qu'un nombre fini de coordonnées n. On a alors, pour tout $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned}
\|v^k - v^\infty\|_\infty &= \sup_n |v_n^k - v_n^\infty| \\
&= \max\big(\max_{n<n_0} |v_n^k - v_n^\infty|\ ,\ \sup_{n\geq n_0} |v_n^k - v_n^\infty|\big) \\
&\leq \max\big(\max_{n<n_0} |v_n^k - v_n^\infty|\ ,\ \sup_{n\geq n_0} |v_n^k| + \sup_{n\geq n_0} |v_n^\infty|\big) \\
&< \max\big(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\big) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $v^\infty \in K$ est limite de la suite extraire (v^k) et donc K est compact. $\square$

Un exemple important est dû à Giulio Ascoli (1843-1896, Italie). Pour avoir de la compacité dans les ensembles de fonctions, il faut que la continuité soit en quelque sorte uniforme, par exemple avec une pente ou une dérivée bornée.

Proposition 6.7 (théorème d'Ascoli)

Soient $a < b$ et soit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Un ensemble K de fonctions est compact si et seulement si :

(i) K est fermé,

(ii) K est borné

(iii) et K est *équicontinu* c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0\ ,\ \forall f \in K\ ,\ \forall x,x' \in [a,b]\ ,\ |x-x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| \leq \varepsilon\ .$$

Corollaire 6.8

Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n'\|_\infty$ sont bornées uniformément, alors on peut trouver une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ et une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \to 0$.

Démonstration : Soit $M \in \mathbb{R}$ qui majore $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n'\|_\infty$ pour tout n. On se place dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. La suite (f_n) est incluse dans l'ensemble

$$K' = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})\ ,\ \ f \text{ est dérivable et } \|f\|_\infty \leq M \text{ et } \|f_n'\|_\infty \leq M\}\ .$$

On note $K = \overline{K'}$ l'adhérence de cet ensemble. Il nous suffit maintenant d'appliquer le théorème d'Ascoli ci-dessus à K.
Comme K' est borné, K est borné et par ailleurs K est fermé par construction. On va montrer que K est équicontinu. On commence par constater que toute fonction de K' est $M-$lipschitzienne car sa dérivée est bornée par M (cf proposition 4.20). Il en est de même pour les fonctions de K. En effet, si $(g_n) \subset K'$ converge vers $g \in K$, alors $|g_n(x) - g_n(x')|$ converge vers $|g(x) - g(x')|$ et la majoration $|g_n(x) - g_n(x')| \leq M|x - x'|$ passe à la limite. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta = \varepsilon/M$. Comme toute fonction $g \in K$ est $M-$lipschitzienne, on a, pour tout x,x' avec $|x - x'| \leq \delta$, $|g(x) - g(x')| \leq M|x - x'| \leq \varepsilon$. $\square$

On peut donc extraire des sous-suites convergentes aux fonctions, à condition de « perdre » de la régularité au passage. Il s'agit d'un principe important en analyse fonctionnelle (pour obtenir de la compacité, il faut donc « gagner » de la régularité par un certain argument).

1.4 Quelques propriétés des compacts

Nous finissons cette partie par de petits résultats qui peuvent être utiles pour montrer que des ensembles sont compacts. Leur preuve font aussi de bons entraînements pour manier le concept de compacité.

Proposition 6.9

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $K_1, \ldots, K_p$ un nombre fini de compacts de E. Alors l'union $K_1 \cup \ldots \cup K_p$ est un compact de E.

Démonstration : Utilisons la caractérisation par recouvrement. Soit $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ un recouvrement de $K_1 \cup \ldots \cup K_p$ par des ouverts. Comme chaque K_i est compact et est recouvert par $\cup_j \mathcal{O}_j$, on peut trouver un recouvrement fini $K_i \subset \mathcal{O}_{j_1^i} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{j_{q_i}^i}$. Mais alors l'union de tous les recouvrements finis fournit un recouvrement fini de l'union des K_i. $\square$

Il faut évidemment se limiter à un nombre fini de compacts car une union infinie de bornés n'a aucun raison d'être bornée par exemple. Pour l'intersection, on peut être plus général.

Proposition 6.10

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit K un compact de E et F un fermé de E, alors $K \cap F$ est un compact de E.

Démonstration : Soit (x_n) une suite de $K \cap F$. C'est a fortiori une suite du compact K et donc on peut en extraire une sous-suite qui converge vers $\ell \in K$. Il reste à voir que F est fermé et donc que la limite est aussi dans F et donc au final $\ell \in K \cap F$. $\square$

Corollaire 6.11

Une intersection quelconque de compacts est compact.

Démonstration : Soit $(K_j)_{j\in J}$ une famille de compacts. Soit K_{j_0} l'un deux et soit $F = \cap_{j\neq j_0} K_j$ l'intersection des autres. Comme les K_j sont compacts, ils sont fermés et F est fermé comme intersection de fermés. Donc $\cap_j K_j = K_{j_0} \cap F$ est un compact. $\square$

On a aussi une généralisation du théorème des segments emboîtés.

Proposition 6.12

Soit (K_n) une suite de compacts non vides de E qui sont emboîtés dans le sens où $K_{n+1} \subset K_n$. Alors $\cap_n K_n$ est un compact <u>non vide</u>.

Démonstration : Pour tout n, on choisit $x_n \in K_n$. Par emboîtement, la suite (x_n) est incluse dans K_0 qui est compact, donc on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in K_0$. Mais pour tout N, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq N}$ est incluse dans K_N qui est fermé et donc $\ell \in K_N$ pour tout N. □

2 Fonctions et compacité

En dimension $d = 1$, nous avions deux théorèmes importants utilisant la continuité et la compacité des intervalles $[a,b]$. Maintenant que le travail de préparation des bonnes notions est fait, la généralisation est immédiate.

Théorème 6.13 (théorème de Heine)

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et soit $K \subset X$ un ensemble compact. Alors toute fonction f continue de K dans Y est uniformément continue.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, pour tout $x \in K$, il existe un rayon $\delta(x) > 0$ tel que pour tout $x' \in B(x,\delta(x))$, $\|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon/2$. Nous considérons maintenant toutes les boules $B(x,\delta(x)/2)$ pour $x \in K$, qui forment une famille d'ouverts qui recouvrent K (puisque chaque x est au moins dans la boule dont il est le centre). Le théorème de Borel-Lebesgue montre que la compacité de K implique qu'on le peut recouvrir par un nombre fini de boules $B(x_i,\delta(x_i)/2)$, $i = 1,\ldots,p$. On pose $\delta = \min_i \delta(x_i)/2$. Soient x et x' deux points de K avec $\|x - x'\|_X < \delta$. Par construction, x est dans une des boules $B(x_i,\delta(x_i)/2)$ et par inégalité triangulaire, x' est au pire dans la boule $B(x_i,\delta(x_i))$. Par définition de cette boule, on a donc $\|f(x) - f(x_i)\|_Y < \varepsilon/2$ et $\|f(x') - f(x_i)\|_Y < \varepsilon/2$. Par inégalité triangulaire, on obtient donc que $\|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon$. On vient de démontrer l'uniforme continuité de f. □

Le théorème des valeurs extrêmes se généralise ainsi.

Théorème 6.14

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et soit $K \subset X$ un ensemble compact. Alors l'image $f(K)$ de K par une fonction continue $f : K \to Y$ est un compact de Y.

Démonstration : Nous allons utiliser le critère séquentiel. Soit (y_n) une suite de l'image $f(K)$. Par définition, il existe une suite de points $(x_n) \subset K$ tels que $f(x_n) = y_n$. Comme K est compact, on peut extraire de cette suite une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un point $x_* \in K$. Par continuité, on a $f(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y_* := f(x_*)$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ est bien une sous-suite de (y_n) qui converge vers un point y_* de $f(K)$. Donc $f(K)$ est compact. □

Le théorème précédent est important et s'exprime plus littéralement par « l'image d'un compact par une fonction continue est un compact ». On fera attention au fait que le sens est différent du sens transférant les propriétés d'ouverture et de fermeture. En particulier, l'image réciproque d'un compact par une fonction continue est forcément un fermé mais pas forcément un compact : l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction constante $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 0$ est tout $\mathbb{R}$, qui n'est pas compact.

Un corollaire immédiat du théorème 6.14 est le suivant.

Corollaire 6.15

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et soit $K \subset X$ un ensemble compact non vide. Soit f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration : Le théorème 6.14 montre que $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$, qui est forcément fermé et borné. La borne et le fait que K est non vide nous dit que $\sup_{x\in K} f(x)$ est bien défini. Le fait que l'image est fermé oblige le sup à appartenir à l'image et donc il s'agit d'un max. Le raisonnement est le même pour la borne inférieure. □

Exemples :

- Une courbe continue de $\mathbb{R}^2$ décrite par un paramétrage continue $f : t \in [0,1] \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^2$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En particulier, c'est un ensemble borné.

- Si un coût $c(x,y,z)$ dépend continuement de trois paramètres dans $[0,1]$, alors il existe forcément un point $(x_*,y_*,z_*) \in [0,1]^3$ où ce coût est minimal.

- Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. On vérifie facilement que K^2 est un compact de $\mathbb{R}^{2d}$ (par exemple parce qu'il est fermé et borné en utilisant la convergence composante par composante). La fonction $f : (x,x') \in K^2 \mapsto \|x - x'\|_2 \in \mathbb{R}$ est continue comme composée de fonctions continues, elle atteint donc son maximum en un couple de points $(x_1,x_2) \in K^2$. Ce couple est le plus éloigné possible dans K : c'est une réalisation de son diamètre (cf figure 4.6.1).

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ une fonction continue et qui est donc bornée par une constante M. On considère l'ensemble K des polynômes $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tels que $\|f - P\|_\infty \leq M$. C'est un ensemble non vide (car $P = 0$ est dedans), il est borné (car par inégalité triangulaire $\|P\|_\infty \leq 2M$) et fermé (par continuité de la norme). Comme $\mathbb{R}_d[X]$ est un espace de dimension finie, K est un compact. Il existe donc un polynôme P_* tel que l'erreur $\|f - P_*\|_\infty$ est minimale parmi toutes les approximations de f. Il est par contre délicat de savoir précisément lequel ce qu'il vaut, un exemple simple est donné en figure 6.1. Si on considère la norme $\|\cdot\|_2$ plutôt que la norme infini, alors on a l'outil du produit scalaire et on peut montrer que P_* est la projection orthogonale de f sur les polynômes de degré au plus d.

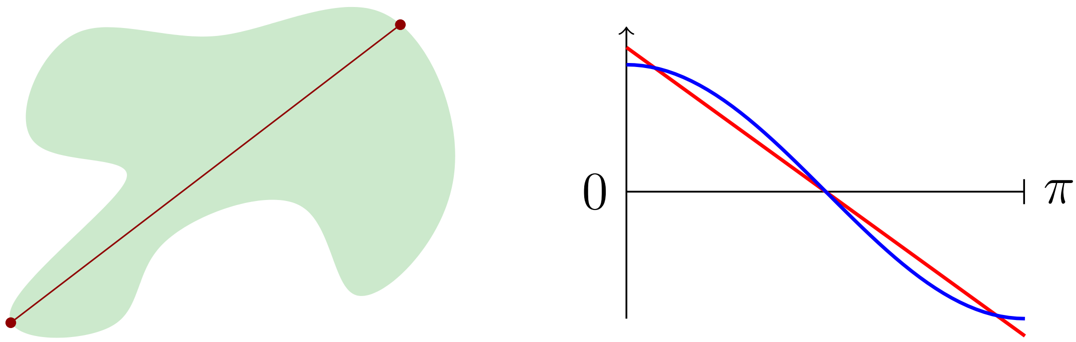

FIGURE 6.1 – *À gauche, un exemple de compact du plan et de ses deux points les plus éloignés possibles. À droite, la fonction cosinus et le polynôme de degré 1 qui minimise le maximum de l'erreur sur* $[0,\pi]$.

Application aux vecteurs propres des matrices symétriques

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est-à-dire que $A^t = A$. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|\cdot\|_2$ qui est associée au produit scalaire canonique. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $S = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_2 = 1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $f(x) = \langle Ax|x\rangle$. La fonction f est continue sur S car elle est $2|||A|||-$lipschitzienne

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |\langle Ax|x\rangle - \langle Ay|y\rangle| = |\langle Ax|(x-y)\rangle - \langle A(x-y)|y\rangle| \\ &\leq |\langle Ax|(x-y)\rangle| + |\langle A(x-y)|y\rangle| \leq \|Ax\|_2\|x-y\|_2 + \|A(x-y)\|_2\|y\|_2 \\ &\leq |||A|||\cdot\|x\|_2\|x-y\|_2 + |||A|||\cdot\|x-y\|_2\|y\|_2 \\ &\leq 2|||A|||\cdot\|x-y\|_2\ .\end{aligned}$$

Par ailleurs, S est fermée bornée dans $\mathbb{R}^d$ de dimension finie, donc S est compacte. On en déduit que f admet un maximum sur S, atteint en un point x_*. Soit Y l'espace orthogonal à x_* et soit $y \in Y$. Les points $x_t = \cos(t)x_* + \sin(t)y$ sont sur la sphère S par théorème de Pythagore (ou calcul explicite). On a que, pour $t \in \mathbb{R}$ petit, $x_t = x_* + ty + \mathcal{O}(t^2)$ et donc

$$\begin{aligned}f(x_t) &= \langle Ax_*|x_*\rangle + t\langle Ax_*|y\rangle + t\langle Ay|x_*\rangle + \mathcal{O}(t^2) \\ &= f(x_*) + t\langle Ax_*|y\rangle + t\langle y|Ax_*\rangle + \mathcal{O}(t^2) \\ &= f(x_*) + 2t\langle Ax_*|y\rangle + \mathcal{O}(t^2)\ .\end{aligned}$$

Comme $f(x_*)$ est maximum, ce développement implique que $y \perp Ax_*$. Comme c'est vrai pour tout $y \in Y$, c'est que Ax_* est colinéaire à x_* et donc x_* est vecteur propre de A. Puis on considère maintenant le même problème mais dans Y. Comme $\langle Ay|x_*\rangle = \langle y|Ax_*\rangle = 0$, on sait que A envoie Y sur Y. On peut recommencer la méthode dans un espace ayant une dimension de moins. En continuant ainsi, on construit une base orthonormale de vecteurs propres pour A : toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.