Chapitre 4 : Fonctions sur les espaces vectoriels normés

1 Définitions générales

Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est de façon intuitive une boîte noire qui envoie tout $x \in E$ sur une image $f(x) \in F$. On peut donner de façon plus rigoureuse les définitions suivantes.

Définition 4.1

Soient E et F deux ensembles. Une **fonction** $f : E \longrightarrow F$ est la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{G}_f \subset E \times F$ appelé **graphe** de f tel que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple (x,y) dans $\mathcal{G}_f$. On dit alors que y est l'image de x et on note $y = f(x)$.

La définition abstraite ci-dessus permet de dépasser l'idée qu'une fonction est une formule calculatoire. On voit aussi l'équivalence entre la donnée du graphe et celle de la fonction. Notons que le graphe est donc un sous-ensemble de $E \times F$ avec exactement un seul point « au-dessus » de chaque $x \in E$. Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est donc une courbe uni-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^3$ (enfin s'il y a plus ou moins de continuité, sinon c'est un ensemble de points très irrégulier). Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est donc une surface bi-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^3$ (avec la même restriction qu'il faut une certaine régularité pour avoir une vraie surface). Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de $\mathbb{R}^4$ qu'il sera plus difficile de visualiser etc.

Définition 4.2

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction et $E' \subset E$ un sous-ensemble de E. L'**image** de E' par f est

$$f(E') \ := \ \{ y \in F, \exists x' \in E' , f(x') = y \} .$$

Soit $F' \subset F$ un sous-ensemble de F. L'**image réciproque** de F' par f est

$$f^{-1}(F') \ := \ \{ x \in E , f(x) \in F' \} .$$

! La notation $f^{-1}(F')$ ne signifie pas que f est bijective ni même injective. Il s'agit d'une opération sur les ensembles et si $F' = \{y'\}$ est un singleton, $f^{-1}(\{y'\})$ peut contenir une infinité de points. Et même si f est bijective avec $f(x) = y'$, remarquons que $f^{-1}(\{y'\})$ vaut $\{x\}$ et non pas x. De fait, les notations ci-dessus sont conventionnelles mais un peu abusives puisque formellement, on ne regarde pas la fonction f mais une fonction $\tilde{f} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ qui envoie un sous-ensemble de E sur un sous-ensemble de F.

Exemple :

On considère la fonction $f \;:\; \theta \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$. L'image de f est exactement le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Par ailleurs,

$$f^{-1}(\{(1,0)\}) = 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}) = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \ .$$

On rappelle les définitions suivantes normalement très familières.

Définition 4.3

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f est **surjective** si $f(E) = F$. On dit que f est **injective** si $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$. Si f est à la fois injective est surjective, on dit qu'elle est **bijective**.

Définition 4.4

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Soit $\tilde{E} \subset E$ un sous-ensemble de E. On dit que $\tilde{f} : \tilde{E} \longrightarrow F$ est la **restriction** de f à $\tilde{E}$ si on a $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in \tilde{F}$. On note alors $\tilde{f} = f_{|\tilde{E}}$.

Dans ce cours, nous nous concentrons sur les espaces vectoriels. Soit $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Une fonction entre X et Y est une fonction du type

$$f \;:\; \mathcal{D}_f \subset X \;\longrightarrow\; Y$$

où $\mathcal{D}_f$ est un sous-ensemble de X. On aura souvent affaire à des fonctions définies sur tout X, mais ce n'est pas forcément toujours le cas, ne serait-ce qu'à cause des multiples fonctions réelles pas définies partout sur $\mathbb{R}$. Comme Y n'admet pas forcément de notion d'ordre, on ne peut plus parler de fonction majorée ou minorée, ni de fonction croissante etc. On peut par contre conserver une notion de borne.

Définition 4.5

Une fonction $f : \mathcal{D}_f \subset X \longrightarrow Y$ définie entre deux espaces vectoriels normés est **bornée** si son image $f(\mathcal{D}_f)$ est un borné de Y, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \ , \quad \|f(x)\|_X \leq M \ .$$

2 Limites

Nous allons généraliser la notion de limite que l'on connaît sur $\mathbb{R}$. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et soit une fonction

$$f \;:\; \mathcal{D}_f \subset X \;\longrightarrow\; Y \;.$$

On peut chercher à obtenir la limite de la fonction en un point de $\mathcal{D}_f$ mais aussi sur un point sur le bord du domaine de définition.

Définition 4.6

Soit f comme ci-dessus et soit $x_* \in \overline{\mathcal{D}_f}$. On dit que $f(x)$ **converge vers** $\ell \in Y$ ou **a pour limite** ℓ quand x tend vers x_* si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,,\ \forall x \in \mathcal{D}_f\,,\ \|x - x_*\|_X < \delta \ \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_Y < \varepsilon\ .$$

On note alors

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_*]{} \ell\ .$$

Comme pour le cas réel, la définition est alourdie à cause du domaine de définition mais il s'agit juste d'être sûr que $f(x)$ a un sens. Et comme pour le cas réel, il existe plusieurs façon d'écrire la même notion de limite.

Proposition 4.7

Soit $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$, soit $x_* \in \overline{\mathcal{D}_f}$ et soit $\ell \in Y$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_*.

(ii) Pour toute boule ouverte $B(\ell,\varepsilon)$, il existe une boule $B(x_*,\delta)$ telle que $f(B(x_*,\delta) \cap \mathcal{D}_f) \subset B(\ell,\varepsilon)$.

(iii) Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y contenant ℓ, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de X contenant x_* tel que $f(\mathcal{U} \cap \mathcal{D}_f) \subset \mathcal{O}$.

(iv) Pour toute suite $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$ qui converge vers x_* dans X, la suite $f(x_n)$ converge dans Y vers ℓ.

Démonstration : Pour commencer par ce qui est évident, on se convainc facilement que (ii) n'est qu'une réécriture géométrique de (i) qui remplace les estimations de distances par l'appartenance à des boules.
Montrons maintenant que (ii) implique (iii). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y contenant ℓ. Par définition d'un ouvert, il existe une petite boule $B(\ell,\varepsilon)$ incluse dans $\mathcal{O}$. (ii) fournit une boule $B(x_*,\delta)$ telle que $f(B(x_*,\delta) \cap \mathcal{D}_f) \subset B(\ell,\varepsilon)$ et $B(x_*,\delta) \cap \mathcal{D}_f$ est un ouvert du domaine comme recherché.
Montrons que (iii) implique (iv). Soit $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$ une suite qui converge vers x_* dans X. Soit $\varepsilon > 0$. La boule $B(\ell,\varepsilon)$ est un ouvert de Y, donc il existe un

ouvert $\mathcal{U}$ de X contenant x_* tel que $f(\mathcal{U} \cap \mathcal{D}_f) \subset B(\ell,\varepsilon)$. Comme x_* est dans $\mathcal{U}$ ouvert, il existe une petite boule $B(x_*,\delta)$ incluse dans $\mathcal{U}$ et donc qui a une image dans $B(\ell,\varepsilon)$. La suite (x_n) tendant vers x_*, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(x_*,\delta)$. On a alors $f(x_n) \subset B(\ell,\varepsilon)$ pour tout $n \geq N$. Ceci montre que $f(x_n)$ tend vers ℓ.
Enfin, montrons que (iv) implique (ii) par contraposée, c'est-à-dire montrons que non (ii) implique non (iv). Si (ii) est faux, c'est qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe un point $x_\delta \in B(x_*,\delta) \cap \mathcal{D}_f$ tel que $f(x_\delta) \notin B(\ell,\varepsilon)$. On applique cette propriété pour $\delta = 1/n$ et on trouve une suite de points $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$ tels que $\|x_n - x_*\| < 1/n$ et $f(x_n) \notin B(\ell,\varepsilon)$. Cela donne un contre-exemple à la propriété (iv) qui est donc fausse. $\square$

Les règles de manipulation sur les limites de fonctions se déduisent directement de la proposition ci-dessus et des règles sur les limites de suites. Évidemment, on ne peut pas parler de la multiplication ou division car ces opérations n'ont généralement pas de sens dans un espace vectoriel.

Proposition 4.8

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Soient $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$, $g : \mathcal{D}_g \subset X \to Y$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x_* \in \overline{\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}$, si f et g ont des limites en x_*, alors $\lambda f + g : \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \to Y$ a aussi une limite en x_* et

$$\lim_{x \to x_*} (\lambda f + g)(x) \;=\; \lambda \lim_{x \to x_*} f(x) + \lim_{x \to x_*} g(x)\ .$$

Proposition 4.9

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ et $(Z,\|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés. Soient $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$, $g : \mathcal{D}_g \subset Y \to Z$. Quitte à restreindre f, on suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Soit $x_* \in \overline{\mathcal{D}_f}$. Si f a une limite y_* en x_* et si g a une limite en y_*, alors $g \circ f$ a une limite en x_* et

$$\lim_{x \to x_*} g(f(x)) \;=\; \lim_{y \to \left(\lim_{x \to x_*} f(x)\right)} g(y)\ .$$

! On fera attention qu'il n'existe plus de concept de « tendre vers l'infini » dans un espace vectoriel normé. Dans $\mathbb{R}$ on voit bien ce que veut dire tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$. Mais même dans le plan $\mathbb{R}^2$, on peut aller vers l'infini dans plein de directions différentes, mais aussi en tourbillonnant ou avec des mouvements plus tordus. On pourrait juste parler de $\|f\|_Y$ qui tend vers l'infini, au sens des réels.

En dimension finie, nous savons que toutes les normes sont équivalentes et que la convergence des suites est équivalente à la convergence composante par composante. On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 4.10

Soit $(X,\|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et soit $Y=\mathbb{R}^d$ muni de n'importe quelle norme. On considère une fonction $f:\mathcal{D}_f\subset X\to\mathbb{R}^d$ avec $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_d(x))$ et chaque f_i est à valeur dans $\mathbb{R}$. Alors $f(x)$ converge en x_* si et seulement si chaque $f_i(x)$ converge et on a

$$\lim_{x\to x_*} f(x) \;=\; \Big(\lim_{x\to x_*} f_1(x)\,,\ \lim_{x\to x_*} f_2(x)\,,\ \ldots\,,\ \lim_{x\to x_*} f_d(x)\Big)\ .$$

Dans $\mathbb{R}$, il existe les notions de convergence à droite et à gauche. Dans un espace plus général, il y a plein de façons d'approcher un point. Une généralisation raisonnable est la suivante.

Définition 4.11

Soient $f:\mathcal{D}_f\subset X\to Y$, $D\subset\mathcal{D}_f$ et $x_*\in\overline{D}$. On dit que $f(x)$ **converge quand** $x\to x_*$ **selon l'ensemble** D si la restriction $f_{|D}$ converge quand $x\to x_*$. En particulier, si $D=x_*+\mathbb{R}e$ est une droite affine de E de direction $e\in E$, on dit que $f(x)$ converge en x_* **selon la direction** e.

Exemples :

- La fonction $f:x\in\mathbb{R}\mapsto(x^2,x\ln x)\in\mathbb{R}^2$ est définie sur $]0,+\infty[$. Quand $x\to 0$, la convergence composante par composante montre que $f(x)\to(0,0)$.

- La fonction $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(x+\cos y,x\ln x+\sin y)$ est définie sur le demi-plan ouvert $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On veut regarder ce qu'il se passe quand (x,y) tend vers un point du bord $(0,y_*)$. On prend deux suites réelles (x_n) et (y_n) qui tendent respectivement vers 0 et y_*. On a par composition des limites $f(x_n,y_n)\to(\cos y_*,\sin y_*)$. D'après la caractérisation (iv) de la proposition 4.7, cela montre que $f(x,y)\to(\cos y_*,\sin y_*)$ quand $(x,y)\to(0,y_*)$.

- La fonction $f:(x,y)\in\mathbb{R}\mapsto y\ln x\in\mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On a $f(1/n,0)=0$ mais $f(e^{-n},1/n)=-1$. On a deux suites qui tendent vers 0 mais dont les images ne convergent pas vers la même limite. D'après la caractérisation (iv) de la proposition 4.7, cela montre que f n'a pas de limite en 0.

- Dans un e.v.n. E quelconque, la fonction $f:x\in E\setminus\{0\}\mapsto\frac{x}{\|x\|^{1/2}}$ est bien définie pour $x\neq 0$. Quand $x\to 0$, on a

$$\|f(x)\|=\left\|\frac{1}{\|x\|^{1/2}}x\right\|=\frac{1}{\|x\|^{1/2}}\|x\|=\|x\|^{1/2}\to 0\ .$$

  Donc f converge vers 0 quand x tend vers 0.

- On regarde maintenant la fonction $f:x\in E\setminus\{0\}\mapsto\frac{x}{\|x\|}$ qui est à valeur dans la sphère unité $S=\{x\in E,\|x\|=1\}$: c'est ce qu'on appelle la normalisation d'un vecteur x. Quand $x\to 0$, f n'a pas de limite. Par exemple, si on prend un $x\in E$ non nul, la suite $x_n=\frac{1}{n}x$ tend vers 0 et $f(x_n)=x\to x$ mais la suite $\tilde{x}_n = -\frac{1}{n}x$ tend aussi vers 0 et $f(\tilde{x}_n) = -x \to -x \neq x$. Par contre, la fonction f a une limite selon chaque demi-droite $\mathbb{R}_+^*.x$.

- Enfin, on considère la fonction $f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Quand $x \to 0$, on a

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{1}{\|x\|^2} x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \to +\infty \ .$$

La norme de f « explose » près de 0 mais on ne peut pas parler de convergence de f vers un certain objet « infini » car la direction de $f(x)$ dépend de la direction de x.

3 Continuité

Nous suivons la même démarche que pour les fonctions réelles : une fois comprise la notion de limite précédente, la continuité devient naturelle.

Définition 4.12

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Soient $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$ et soit $x_* \in \mathcal{D}_f$. On dit que f **est continue en** x_* si

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \, , \, \forall x \in \mathcal{D}_f \, , \, \|x - x_*\|_X < \delta \ \Rightarrow \|f(x) - f(x_*)\|_Y < \varepsilon \ ,$$

c'est-à-dire si $f(x)$ converge vers $f(x_*)$ quand $x \to x_*$. On dit que f est **continue sur un ensemble** $D \subset \mathcal{D}_f$ si f est continue en chaque $x_* \in D$. On note alors $f \in \mathcal{C}^0(D,Y)$.

Il suffit d'appliquer la proposition 4.7 pour obtenir les caractérisations suivantes.

Proposition 4.13

Soit $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$, soit $x_* \in \overline{\mathcal{D}_f}$, les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue en x_*.

(ii) Pour toute boule ouverte $B(f(x),\varepsilon)$, il existe une boule $B(x_*,\delta)$ telle que $f(B(x_*,\delta) \cap \mathcal{D}_f) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

(iii) Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y contenant $f(x_*)$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de X contenant x_* tel que $f(\mathcal{U} \cap \mathcal{D}_f) \subset \mathcal{O}$.

(iv) Pour toute suite $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$ qui converge vers x_* dans X, la suite $f(x_n)$ converge dans Y vers $f(x_*)$.

En corollaire immédiat de la définition et des propriétés des limites, on obtient les règles suivantes.

Proposition 4.14

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Soient $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$, $g : \mathcal{D}_g \subset X \to Y$ et $\lambda : \mathcal{D}_\lambda \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $x_* \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_\lambda$, si f, g et λ sont continues en x_*, alors $\lambda f + g$ est aussi continue en x_*.

Proposition 4.15

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ et $(Z,\|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés. Soient $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$, $g : \mathcal{D}_g \subset Y \to Z$. Soit $x_* \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x_*) \in \mathcal{D}_g$. Si f est continue en x_* et si g est continue en $f(x_*)$ alors $g \circ f$ est continue en x_*.

Exemples :

- La fonction identité $\mathrm{Id} : x \in X \mapsto x \in X$ est toujours continue si les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont les mêmes (par exemple en appliquant la caractérisation (iv) de la proposition 4.13).
- La norme $x \in X \mapsto \|x\|_X \in \mathbb{R}$ est toujours continue pour sa propre topologie, c'est la proposition 3.43.
- La fonction de normalisation $f : x \in X \setminus \{0\} \longmapsto \frac{1}{\|x\|_X} x \in X$ est continue en dehors de 0 par combinaison des exemples précédents. Par contre, le travail plus haut sur les limites en 0 de cet exemple montre qu'on ne peut pas prolonger la fonction par continuité en 0 puisqu'elle n'a pas de limite en 0.
- On considère l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_p X^p\| = \max_{i=1,\ldots,p} |a_i|$. (cf le corollaire 3.18. La dérivation $P \mapsto P'$ n'est pas continue partout. Par exemple, $P_n = \frac{1}{n} X^n$ est une suite qui tend vers 0, la dérivée de 0 est 0 mais $P_n' = X^{n-1}$ est de norme 1 et ne tend donc pas vers 0.

En particulier, quand on combine avec la caractérisation de la convergence composante par composante et l'équivalence des normes qui sont vraies en dimension finie, on obtient la règle suivante.

Soit f une fonction définie d'une partie de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d'}$ (munis des normes que l'on veut). Si les composantes de $f(x)$ sont définies par des formules utilisant les fonctions réelles continues usuelles appliquées aux coordonnées de x, alors f est continue là où elle est définie.

Exemples :

- La fonction $f : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ est continue et a pour image le cercle unité. En effet, si (θ_n) est une suite convergeant vers θ_*, alors pour continuité des formules trigonométriques, $\cos\theta_n$ tend vers $\cos\theta_*$ et $\sin\theta_n$ tend vers $\sin\theta_*$. La convergence des deux coordonnées donne la convergence de tout le vecteur et donc la continuité.

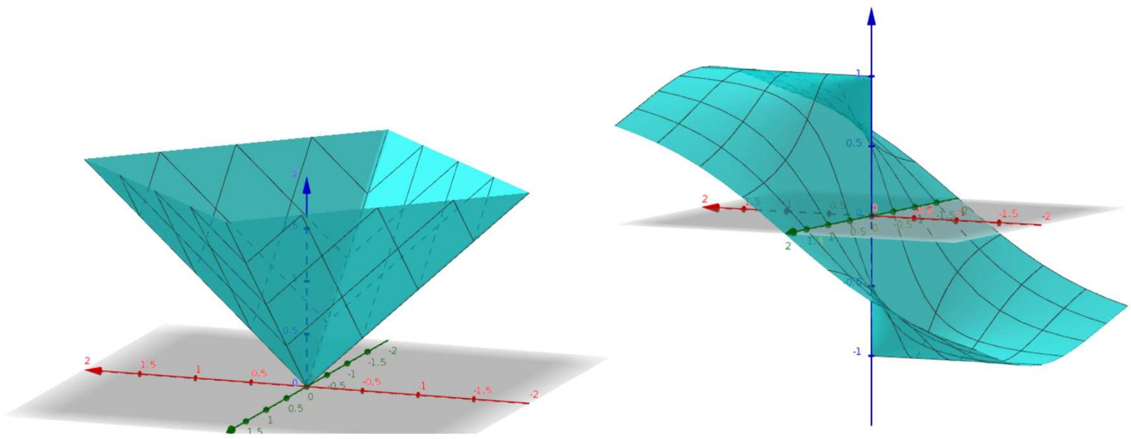


FIGURE 4.1 – *À gauche, la fonction* $(x,y) \mapsto \|(x,y)\|_1$ *qui est continue en* 0. *À droite, la fonction* $(x,y) \mapsto x/\|(x,y)\|_2$ *qui est la première coordonnée de la normalisation. On voit qu'en* 0*, la fonction a toutes les limites possibles entre* -1 *et* 1 *suivant la direction selon laquelle on tend vers* 0.

- La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \big(x^2, e^y \sin x, \frac{y^3}{1+x^2}\big)$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. En effet, si (x_n,y_n) tend vers (x_*,y_*), par continuité des fonctions usuelles et propriété des suites réelles, on a $e^{y_n} \sin x_n$ qui tend vers $e^{y_*} \sin y_*$. Cela montre la convergence de la deuxième composante et les autres se traitent pareil.

- On reprend l'exemple plus haut sur la dérivation dans l'espace des polynômes. On se limite à $X = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus d. Celui-ci est un espace identifiable à $\mathbb{R}^{d+1}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ par l'identification de $P = a_0 + \ldots + a_d X^d$ au vecteur $(a_0, \ldots, a_d)$. La dérivation n'est rien d'autre que la fonction $\partial : (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d) \mapsto (a_1, 2a_2, \ldots, da_d, 0)$ qui est continue comme polynôme en les coefficients.

- On munit l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. C'est un espace de dimension n^2 donc toutes les normes sont équivalentes. Le déterminant d'une matrice $A = (a_{i,j})$ est un réel qui peut s'écrire selon la formule
$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{d,\sigma(d)} \ldots a_{d,\sigma(d)} \ .$$
Cette formule dépend polynomialement des coefficients, elle est donc continue par rapport à la matrice.

De manière générale, on pourra constater que l'application des critères de convergence et continuité ainsi que les propriétés des normes équivalentes montrent qu'une fonction est continue ou non indépendamment du fait de remplacer les normes de départ et d'arrivée par des normes équivalentes. Par contre, attention quand les normes ne sont pas équivalentes !

Exemple :

On considère l'identité sur l'espace de fonction $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Si on prend les mêmes normes au départ et à l'arrivée, alors elle est continue par application triviale du critère des suites. Par contre, si on met maintenant des normes différentes au départ et à l'arrivée en considérant

$$\psi \ : \ f \in (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1) \ \longmapsto \ f \in (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)\ .$$

On a vu dans le chapitre précédent quand la suite $f_n : x \mapsto x^n$ tend vers 0 pour la norme 1 car $\|f_n\|_1 = 1/(n+1)$ mais $\|\psi(f_n) - \psi(0)\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$. Donc ψ n'est pas continue en 0. Cela montre que quand les normes ne sont pas équivalentes, la continuité d'une fonction peut dépendre des normes choisies.

Il existe une caractérisation topologique de la continuité de f en tout point. Dans le cas des fonctions définies partout, celle-ci est surtout utile pour prouver que des ensembles sont des ouverts ou des fermés.

Proposition 4.16

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : X \to Y$ une fonction définie partout. Alors f est continue si et seulement si l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ de tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y est un ouvert de X. De même, f est continue si et seulement si l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ de tout fermé $\mathcal{O}$ de Y est un fermé de X.

Démonstration : Soit f une fonction continue sur X et soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y. Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Par définition $f(x) \in \mathcal{O}$ et donc comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe une petite boule $B(f(x),r)$ entièrement incluse dans $\mathcal{O}$. En utilisant la caractérisation (ii) de la proposition 4.13, on obtient une boule $B(x,\delta)$ telle que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),r) \subset \mathcal{O}$. Mais ceci implique que $B(x,\delta) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$. On vient de trouver, pour un point $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ quelconque, une boule $B(x,\delta)$ restant dans $f^{-1}(\mathcal{O})$, ce qui montre que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert.
Si on suppose maintenant que f est telle que l'image réciproque d'un ouvert est toujours ouvert, alors la caractérisation (iii) de la proposition 4.13 avec $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{O})$ prouve que f est continue partout.
L'équivalence pour les fermés se trouve en passant au complémentaire (ou en faisant les démonstrations à l'aide des caractérisations séquentielles). □

! Ne pas se tromper de sens : l'image <u>réciproque</u> d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert. Mais l'image directe d'un ouvert n'est pas forcément ouvert, voir l'exemple plus bas.

Exemples :

- La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y - x^2 \in \mathbb{R}$ est continue car polynômiale en les coordonnées. Comme $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}\ ,\ y >$

$x^2\}$ au-dessus de la parabole est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est $f^{-1}(]0,+\infty[)$.

- Dans tout espace vectoriel normé $(X,\|\cdot\|)$, la sphère $S = \{x \in X, \|x\| = 1\}$ est un fermé de X comme image réciproque de $\{1\}$ par la fonction continue $\|\cdot\|$.

- On a vu que le déterminant est une fonction continue en la matrice. Comme $\{0\}$ est un singleton et est donc fermé dans $\mathbb{R}$, on en déduit que sont image réciproque par le déterminant est fermée, c'est-à-dire que l'ensemble des matrices de déterminant nul est un fermé. En conséquence, l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert des matrices (notons qu'on ne précise pas la norme puisqu'elles sont toutes équivalentes en dimension finie et que la propriété d'ouverture ou fermeture ne dépend donc pas du choix de la norme). On a montré dans les compléments du chapitre précédent sa densité. Donc on trouve que les matrices inversibles forment un ouvert dense de l'espace des matrices, ce qui veut dire que « quasiment toutes » les matrices sont inversibles.

- Une fonction constante f qui à tout $x \in X$ associe le même $c \in Y$ est évidemment continue sur X. L'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ d'un ensemble $\mathcal{O}$ est soit X soit $\emptyset$ suivant que c est dans $\mathcal{O}$ ou pas. Comme X et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés, on retrouve bien que f est continue. Mais $f(X) = \{c\}$, X est ouvert dans X et $\{c\}$ n'est pas ouvert (si Y non trivial). Donc l'image d'un ouvert par une fonction continue n'est pas forcément un ouvert.

Pour finir cette partie, nous allons voir deux notions plus fortes de continuité.

Définition 4.17

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$ et soit $D \subset \mathcal{D}_f$. On dit que f **est uniformément continue sur** D si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,,\ \forall x,x' \in D\,,\ \|x - x'\|_X < \delta \ \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon\ .$$

Définition 4.18

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : \mathcal{D}_f \subset X \to Y$ et soit $K \geq 0$. On dit que f K**-lipschitzienne** si

$$\forall x,x' \in \mathcal{D}_f\,,\ \|f(x) - f(x')\|_Y \leq K\|x - x'\|_X\ .$$

Plus généralement, on dit que f est **lipschitzienne** si elle est $K-$lipschitzienne pour un certain K. Dans le cas particulier où $K \in [0,1]$ (resp. $K \in [0,1[$), on dit que f est **une contraction** (resp. est **strictement contractante**).

Il y a un ordre strict de force pour ces différentes propriétés.

Proposition 4.19

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue et toute fonction uniformément continue est continue. Les réciproques sont fausses.

Démonstration : Supposons f $K-$lipschitzienne. Si $K = 0$, c'est une fonction constante et elle est clairement uniformément continue. Sinon, pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon/K$ et pour tout x et x' vérifiant $\|x - x'\|_X < \delta$, on a

$$\|f(x) - f(x')\|_Y \leq K\|x - x'\| < K\delta = \varepsilon \; .$$

Donc f est aussi uniformément continue.
Si f est uniformément continue, il suffit de fixer x' à l'avance, sans lui laisser la liberté du « pour tout » pour qu'on obtienne la définition de la continuité en x'. Donc f est continue en tout x' et donc continue partout.
Nous avons déjà vu sur $\mathbb{R}$ que $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue. Nous savons aussi par le théorème de Heine que $f : x \in [0{,}1] \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0{,}1]$. Mais si on prend $x = 0$ et $x' = 1/n$, on a $\frac{|f(x)-f(x')|}{[x-x'|} = \sqrt{n}$ qui ne peut pas être borné par une constante K quand n tend vers l'infini. Donc f n'est pas lipschitzienne sur $[0{,}1]$. $\square$

Dans $\mathbb{R}$, on utilisera souvent le critère suivant.

Proposition 4.20

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$. Alors f est $K-$lipschitzienne si et seulement si sa dérivée f' est bornée par $|f'| \leq K$ sur I. En particulier, $f \in \mathcal{C}^1([a{,}b]{,}\mathbb{R})$ est forcément lipschitzienne.

Démonstration : Si x et x' sont deux points de I, disons $x < x'$ (s'il y a égalité, tout est trivial), alors le théorème des accroissements finis dit que

$$|f(x) - f(x')| \leq \left(\max_{\theta \in]x,x'[} |f'(\theta)| \right) .|x - x'| \; .$$

Une borne K sur la dérivée donne directement que f est $K-$lipschitzienne.
Supposons maintenant que f est dérivable et $K-$lipschitzienne. On a alors

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|(x+h) - x|} \leq K \; .$$

En prenant la limite $h \to 0$, on obtient la borne sur $|f'(x)|$.
Enfin, si $f \in \mathcal{C}^1([a{,}b]{,}\mathbb{R})$, elle est lipschitzienne puisque sa dérivée est bornée car continue sur un intervalle compact. $\square$

Exemples :

- La proposition précédente montre que les fonctions sinus et cosinus sont $1-$lipschitziennes (i.e. contractantes) sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto x^2$ n'étant pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, elle ne peut pas être lipschitzienne. Mais sur chaque intervalle $[-M,M]$, elle est $2M-$lipschitzienne.

- Sur tout espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$, la fonction norme, définie de X dans $\mathbb{R}$, est contractante en application des inégalités triangulaires :

$$|f(x) - f(x')| = \Big|\|x\| - \|x'\|\Big| \leq \|x - x'\| \ .$$

  La norme est donc $1-$lipschitzienne et donc uniformément continue sur X et a fortiori continue sur X.

- De façon triviale, une homothétie $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est $|\lambda|-$lipschitzienne sur tout espace vectoriel normé et une translation $x \mapsto x + x_0$ est $1-$lipschitzienne.

- L'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est une fonction $1-$lipschitzienne pour la norme 1. En effet

$$|I(f) - I(g)| = \left|\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\mathrm{d}x = \|f - g\|_1 \ .$$

- L'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est une fonction $(b-a)-$lipschitzienne pour la norme infini. En effet

$$|I(f)-I(g)| \leq \int_a^b \big|f(x)-g(x)\big|\mathrm{d}x \leq \int_a^b \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|\mathrm{d}x = (b-a)\|f-g\|_\infty \ .$$

- Les deux exemples précédents nous montre que l'intégrale est une fonction continue sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni d'une de ces normes. Donc l'ensemble des fonctions à intégrale nulle est un fermé de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ pour ces topologies car il s'agit de $I^{-1}(\{0\})$.

On démontre aisément les propriétés suivantes.

Proposition 4.21

La somme de fonctions $K-$ et $K'-$lipschitziennes est $(K+K')-$lipschitzienne. La composition de fonctions $K-$ et $K'-$lipschitziennes est $KK'-$lipschitzienne.

Démonstration : Supposons f et g respectivement $K-$ et $K'-$lipschitziennes de X dans Y. Pour tout x et x' dans X,

$$\begin{aligned}\|(f+g)(x)-(f+g)(x')\|_Y &= \|(f(x)-f(x'))+(g(x)-g(x'))\|_Y \\ &\leq \|f(x)-f(x')\|_Y + \|g(x)-g(x')\|_Y \\ &\leq K\|x-x'\|_X + K'\|x-x'\|_X \\ &\leq (K+K')\|x-x'\|_X \ .\end{aligned}$$

Si maintenant $f : X \to Y$ est $K-$lipschitzienne et $g : Y \to Z$ est $K'-$lipschitzienne, alors

$$\|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x')\|_Z \leq K'\|f(x)-f(x')\|_Y \leq K'K\|x-x'\|_X \ . \qquad \square$$

Proposition 4.22

Si f est une fonction $K-$lipschitzienne, alors il existe a et b réels tels que $\|f(x)\|_Y \leq a\|x\|_X + b$.

Démonstration : On prend le cas particulier $x' = 0$ et on obtient $\|f(x) - f(0)\|_Y \leq K\|x-0\|_X$. Par ailleurs, on sait que $\|f(x)-f(0)\|_Y \geq \|f(x)\|_Y - \|f(0)\|_Y$. Cela montre la proposition pour $a = K$ et $b = \|f(0)\|_Y$. $\square$

4 Applications linéaires

Parmi les fonctions entre espaces vectoriels normés, les applications linéaires ont une place privilégiée puisque ce sont celles qui respectent la structure d'espace vectoriel.

Définition 4.23

Une application **linéaire** $f : X \to Y$ entre deux espaces vectoriels réels est une fonction telle que

$$\forall x,x' \in X \ , \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \ f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') \ .$$

On introduit une norme naturelle pour les applications linéaires.

Définition 4.24

Soit $f : X \to Y$ une fonction linéaire entre deux espaces vectoriels réels. S'il existe et est fini, on appelle **norme triple** ou **norme d'application** de f le nombre

$$|||f|||_{X\to Y} \ := \ \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} \ .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $|||f|||$.

La norme triple est géométriquement le facteur d'étirement maximal que présente la fonction. Sa finitude est équivalente à la continuité de la fonction.

Théorème 4.25

Soit $f : X \to Y$ une fonction linéaire entre deux espaces vectoriels réels non triviaux. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) la fonction f est continue de $(X,\|\cdot\|_X)$ dans $(Y,,\|\cdot\|_Y)$

(ii) la fonction f est continue en un point $x_* \in X$

(iii) la fonction f est continue en 0

(iv) la norme triple $|||f|||$ de f existe et est finie

(v) la fonction f est $K-$lipschitizienne avec $K = |||f|||$

Démonstration : Nous allons procéder par boucle d'équivalence. Il est clair que (i) implique (ii) puisque la continuité en un point est un cas particulier de la continuité partout.
Supposons que (ii) est vraie. Soit (ε_n) une suite qui tend vers 0 dans X. On pose $x_n = x_* + \varepsilon_n$ qui est une suite qui tend vers x_*. Par continuité en x_*, on a que $f(x_n)$ tend vers $f(x_*)$. Mais $f(x_n) = f(x_* + \varepsilon_n) = f(x_*) + f(\varepsilon_n)$ par linéarité. Donc $f(\varepsilon_n)$ tend vers 0 dans Y. Comme f est linéaire, $0_Y = f(0_X)$ et on vient donc de montrer que $f(\varepsilon_n)$ tend vers $f(0)$. Donc (iii) est vraie.
Supposons que (iii) est vraie. Pour $\varepsilon = 1$, il existe une boule $B_X(0,\delta)$ telle que pour tout $x \in B_X(0,\delta)$, $\|f(x) - f(0)\|_Y < 1$ et donc $\|f(x)\|_Y < 1$ puisque $f(0) = 0$. La borne supérieure définissant la norme triple est sur un ensemble non vide et bien défini. Il suffit donc de montrer que cet ensemble est majoré. Soit $x \neq 0$. On pose $\tilde{x} = \frac{\delta}{2\|x\|_X}x$, on a $\|\tilde{x}\|_X = \frac{\delta}{2\|x\|_X}\|x\|_X < \delta$. Donc on sait que $\|f(\tilde{x})\|_Y < 1$, ce qui donne que $\left\|f\big(\delta/(2\|x\|_X)x\big)\right\|_Y < 1$. En utilisant la linéarité de f et l'homogénéité de la norme, on obtient $\frac{\delta\|f(x)\|_Y}{2\|x\|_X} < 1$ et donc $\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \frac{2}{\delta}$. Donc $2/\delta$ est un majorant de notre ensemble et sa borne supérieure existe et est finie.
Supposons (iv) vraie et posons $K = |||f|||$. Soit x et x' dans X. Si $x = x'$, il est trivial que $\|f(x) - f(x')\|_Y = 0 \leq K\|x - x'\|_X$. Sinon, on a par définition de K que $\frac{\|f(x-x')\|_Y}{\|x-x'\|_X} \leq K$ et donc que $\|f(x) - f(x')\|_Y = \|f(x - x')\|_Y \leq K\|x - x'\|_X$, où on a utilisé la linéarité de f. Au total, f est bien $K-$lipschitizienne.
Finalement, on a déjà vu que l'implication f lipschitizienne implique f continue est toujours vraie. Donc (v) implique (i). □

On a plusieurs écritures possibles de la norme triple.

Proposition 4.26

On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} |||f||| &:= \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\in B_X(0,1)} \|f(x)\|_Y \\ &= \sup_{x \in \overline{B}_X(0,1)} \|f(x)\|_Y = \sup_{x\in X,\ \|x\|_X=1} \|f(x)\|_Y \ . \end{aligned}$$

Démonstration : Il est clair que plus l'ensemble est petit, plus la borne supérieure est petite. Le reste des arguments est basé sur le principe de normalisation : si $x \neq 0$, on pose $\tilde{x} = x/\|x\|_X$. On a $\|\tilde{x}\|_X = 1$ par homogénéité de la norme. Par linéarité de f et homogénéité de la norme, on a aussi

$$\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \|f(\tilde{x})\|_Y$$

donc le premier sup est le même que le dernier sup sur la sphère.
Pour montrer la dernière égalité, on constate simplement que si $\|x\|_X < 1$, alors soit $x = 0$ et $f(x) = 0$, soit $\tilde{x} = x/\|x\|_X$ est de norme 1 et $\|f(x)\|_Y = \|f(\tilde{x})\|_X\|x\|_X < \|f(\tilde{x})\|_X$. Donc la valeur en x ne dépasse pas la valeur en $\tilde{x}$ et le sup n'est pas influencé par les valeurs de f sur la boule ouverte.
La seconde égalité consiste à passer à la limite. Si x est de norme 1, on pose $x_n = (1-1/n)x$ qui est dans la boule ouverte. Par linéarité de f et homogénéité de la norme, on a $\|f(x_n)\|_Y = (1-1/n)\|f(x)\|_Y \to \|f(x)\|_Y$. Donc $\sup_n \|f(x_n)\|_Y$ est $\|f(x)\|_Y$ et on retrouve ainsi les valeurs sur la sphère omise dans le sup. $\square$

Corollaire 4.27

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Si X est de dimension finie, alors toute fonction linéaire $f : X \to Y$ est continue.

Démonstration : Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de X. Pour tout $x \in X$, avec $x = x_1e_1 + \ldots + x_pe_p$, on pose $N(x) = \sup_i |x_i|$. On vérifie qu'il s'agit d'une norme sur de X (c'est la norme infinie dans la base donnée) et donc par équivalence des normes en dimension finie, il existe $M > 0$ tel que $N(x) \leq M\|x\|_X$. On a alors

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_Y = \|f(x_1e_1 + \ldots + x_pe_p)\|_Y &= \|x_1f(e_1) + \ldots + x_pf(e_p)\|_Y \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|\|f(e_i)\|_Y \leq p \max_i |x_i| \max_i \|f(e_i)\|_Y \\ &\leq pM(\max_i \|f(e_i)\|_Y)\|x\|_X \ . \end{aligned}$$

Cette majoration est équivalente à dire que $|||f||| \leq pM(\max_i \|f(e_i)\|_Y)$ et donc f est continue d'après les résultats précédents. □

On fera attention que, comme souvent dans ce cours, le cas de la dimension infinie est plus subtil.

Exemples :

- On se place dans l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|a_0 + a_1 X + \ldots a_d X^d\| = \sup_i |a_i|$. Pour tout $P = a_0 + a_1 X + \ldots a_d X^d$, on pose $f(P) = a_0 X + \frac{1}{2} a_1 X^2 + \ldots + \frac{1}{d+1} a_d X^{d+1}$ qui est la primitive de P. Il s'agit d'une opération linéaire et comme, clairement, $\|f(P)\| \leq \|P\|$, cela montre que la primitivation est une opération continue sur cet espace de polynômes.

- Dans le même cadre, on regarde maintenant la dérivation, qui est aussi une opération linéaire. On constate que $\|X^n\| = 1$ et $\|nX^{n-1}\| = n$. Donc $\|\partial X^n\|/\|X^n\| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et le rapport dans la définition de la norme triple de la dérivation n'est pas majoré. La dérivation n'est donc pas une application linéaire continue.

La norme triple est plus qu'un test pratique et rapide pour montrer qu'une fonction est continue. Il s'agit, comme son nom l'indique, d'une norme.

Définition 4.28

Pour X et Y deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

Proposition 4.29

Soit X et Y deux espaces vectoriels normés. La norme triple $f \in \mathcal{L}(X,Y) \mapsto |||f|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(X,Y)$.

Démonstration : Il est clair que la norme triple est un nombre positif qui est bien défini par hypothèse sur f. Supposons que $|||f||| = 0$, on a pour tout $x \neq 0$, $\|f(x)\|_Y \leq |||f|||.\|x\|_X = 0$ et donc $f \equiv 0$. Si f et g sont deux fonctions linéaires continues, alors leur somme est forcément linéaire et continue et on a

$$\begin{aligned} |||f+g||| = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|f(x)+g(x)\|_Y &\leq \sup_{x \in B_X(0,1)} (\|f(x)\|_Y + \|g(x)\|_Y) \\ &\leq \sup_{x \in B_X(0,1)} \|f(x)\|_Y + \sup_{x \in B_X(0,1)} \|g(x)\|_Y = |||f||| + |||g||| \ . \end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier l'homogénéité :

$$|||\lambda f||| = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|\lambda f(x)\|_Y = \sup_{x \in B_X(0,1)} |\lambda| \|f(x)\|_Y = |\lambda|.|||f||| \ .$$

□

On peut composer facilement les différents normes triples. Si $Y = X$, on parle alors de norme d'algèbre c'est-à-dire une norme telle que $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Proposition 4.30

Si X, Y et Z sont trois espaces vectoriels normés, si $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ a pour norme triple $|||f|||_{X\to Y}$ et si $g \in \mathcal{L}(Y,Z)$ a pour norme triple $|||g|||_{Y\to Z}$, alors $g \circ f$ est une fonction de $\mathcal{L}(X,Z)$ et sa norme triple vérifie

$$|||g \circ f|||_{X\to Z} \leq |||f|||_{X\to Y}|||g|||_{Y\to Z} \ .$$

Démonstration : Pour tout $x \in X$, on a

$$\|(g \circ f)(x)\|_Z \leq |||g|||_{Y\to Z}\|f(x)\|_Y \leq |||g|||_{Y\to Z}|||f|||_{X\to Y}\|x\|_X \ . \qquad \square$$

Application aux matrices et au conditionnement :
On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ sont représentées par les matrices dans le sens où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ code l'application linéaire $x \mapsto Ax$. Comme on est en dimension finie, ces applications sont toutes continues et on munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de la norme triple associée. Cette norme triple peut se calculer explicitement. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}||x_j| \leq \left(\max_i(\sum_j |a_{ij}|)\right)\|x\|_\infty.$$

Ceci montre que $|||A||| \leq \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$. Si la ligne i_0 est une ligne où le max est atteint et si $x_j = +1$ si $a_{i_0j} \geq 0$ et $x_j = -1$ sinon, alors on a

$$|(Ax)_{i_0}| = \Big|\sum_j a_{i_0j}x_j\Big| = \sum_j |a_{i_0j}| = \max_i(\sum_j |a_{ij}|) \ .$$

Donc $\|Ax\|_\infty \geq \max_i(\sum_j |a_{ij}|)\|x\|_\infty$ et au final

$$|||A||| = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$$

On souhaite maintenant résoudre l'équation linéaire consistant à trouver $x \in X$ tel que $Ax = y$. Si une approximation δy est commise sur y, quelle erreur δx obtient-on sur x ? Ceci est lié au *conditionnement* de A, défini par

$$\text{Condi}(A) = |||A||| \times |||A^{-1}||| \ .$$

En effet, on a $A(x + \delta x) = y + \delta y$ et donc $A\delta x = \delta y$. D'où

$$\|\delta x\|_\infty = \|A^{-1}\delta y\|_\infty \leq |||A^{-1}|||\|\delta y\|_\infty \ .$$

Par ailleurs,

$$\|y\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq |||A|||\|x\|_\infty \ .$$

On obtient donc l'estimation suivante pour les erreurs relatives :

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{Condi}(A)\,\frac{\|\delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty}\,.$$

Comme le conditionnement est symétrique si on change A en A^{-1}, l'estimation précédente reste vraie si on échange x et y, c'est-à-dire si on a plutôt une erreur en x et qu'on cherche à contrôler l'erreur relative en y. En analyse numérique, ce conditionnement est important car si un problème linéaire est mal conditionné, c'est-à-dire qu'il fait intervenir des A pour lesquels $\text{Condi}(A)$ est grand, les erreurs ont toutes les chances d'exploser pendant les calculs. Il est souvent important de *bien conditionner* le problème en reformulant le problème en un problème équivalent mais qui fait intervenir des opérateurs avec des conditionnements plus petits.

5 Compléments

5.1 Topologie induite

Nous avons vu qu'une fonction $f : X \to Y$ est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, cf. la proposition 4.16. Cette caractérisation est pratique mais ne marche pas si f est définie seulement sur un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de X. Il est alors utile d'introduire la notion suivante, qui est plus généralement une façon de définir les ouverts et fermés d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé.

Définition 4.31

Soit $\mathcal{D}_f \subset X$ une partie d'un espace vectoriel normé. On dit que $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}_f$ est un **ouvert du domaine** $\mathcal{D}_f$ ou que $\mathcal{O}$ est **la trace d'un ouvert** sur $\mathcal{D}_f$ s'il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ de X tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap \mathcal{D}_f$. De même, on dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}_f$ est un **fermé du domaine** $\mathcal{D}_f$ ou que $\mathcal{F}$ est **la trace d'un fermé** sur $\mathcal{D}_f$ s'il existe un fermé $\mathcal{F}'$ de X tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cap \mathcal{D}_f$.

Exemples :

- On se place sur $\mathbb{R}$ avec $\mathcal{D}_f = [0,+\infty[$. L'intervalle $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ mais c'est un ouvert du domaine $\mathcal{D}_f$ car $[0,1[\, = \,]-1,1[\, \cap \mathcal{D}_f$.

- On se place sur un espace vectoriel normé E quelconque et on suppose que $\mathcal{D}_f$ contient un point e qui est isolé dans le sens où il existe $r > 0$ tel que $B(e,r) \cap \mathcal{D}_f = \{e\}$. Alors $\{e\}$ est à la fois un ouvert et un fermé du domaine car $\{e\} = B(e,r) \cap \mathcal{D}_f = \overline{B}(e,r/2) \cap \mathcal{D}_f$.

On obtient alors la généralisation de la proposition 4.16. La démonstration est la même mutatis mutandis puisque la définition ci-dessus colle parfaitement aux caractérisations de la proposition 4.13.

Proposition 4.32

Soient $(X,\|\cdot\|_X)$ et $(Y,\|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : X \to Y$ une fonction définie partout. Alors f est continue si et seulement si l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ de tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y est un ouvert de X. De même, f est continue si et seulement si l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{O})$ de tout fermé $\mathcal{O}$ de Y est un fermé de X.

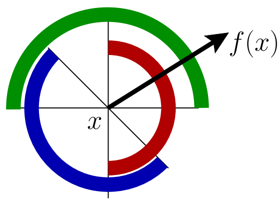
5.2 Le point fixe de Brouwer par un lemme « à la Sperner »

On a énoncé dans la proposition 3.60 un lemme « à la Sperner » sur les coloriages d'une triangulation. Nous allons l'utiliser pour démontrer un résultat qui généralise le théorème de point fixe 2.41 dans un triangle.

Proposition 4.33 (point fixe de Brouwer dans un triangle)

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle rectangle isocèle de sommets (0,0), (1,0) et (0,1), bords compris. Toute fonction continue $f : T \to T$ admet un point fixe.

Démonstration : On découpe le triangle en petits triangles comme auparavant et on regarde chaque sommet de la triangulation. Si le sommet est un point fixe, c'est gagné. Sinon, le vecteur $\overrightarrow{(x,f(x))}$ est non nul et pointe donc une direction. On colorie le sommet par une couleur possible dans le découpage en secteur ci-contre, sauf sur les bords où on prend parmi les choix la couleur qui donnera un coloriage selon les règles de la proposition 3.60. On vérifie que cela est bien possible : par exemple sur le bord ouest, l'image $f(x)$ est forcément à droite de x (pour ne pas sortir du triangle) et donc le choix de la couleur rouge est possible. Si aucun sommet n'est un point fixe, on retrouve un coloriage auquel on peut appliquer la proposition 3.60 et il existe un triangle de sommets x_1, y_1 et z_1 tricolore. On réapplique le procédé avec une triangulation de plus en plus fine. Soit on tombe à un moment sur un point fixe et c'est gagné, soit on obtient des suites de sommets rouges (x_n), verts (y_n) et bleus (z_n) avec $\|x_n - y_n\| \to 0$ et $\|x_n - z_n\| \to 0$. Par le théorème 3.50, on peut supposer, quitte à en extraire une sous-suite, que (x_n) converge vers x_*, qui est aussi limite de (y_n) et (z_n). Si $f(x_*) \neq x_*$, le vecteur $\overrightarrow{(x_*,f(x_*))}$ a une direction avec laquelle une des couleurs n'est pas compatible. Par continuité, cela contredirait la convergence d'une des suites (x_n), (y_n) ou (z_n). Donc x_* est bien un point fixe de f. □



Nous verrons tout à la fin de ce cours qu'il est possible de généraliser le résultat à d'autres formes géométrique F que le triangle T. En particulier, ce résultat de point fixe est vrai pour le disque. Là où ce résultat montre une grande profondeur topologique, c'est qu'il n'est pas vrai pour toute les formes F. Ainsi, si F est un anneau, une rotation non-triviale autour du centre est une fonction continue sans point fixe. Le « trou » dans F fait que l'anneau est différent du triangle et du disque. Commencer à classifier les formes du plan en « comptant » le nombre de « trous » et en regardant les propriétés que cela implique, c'est s'engouffrer dans le domaine des *topologues*.