Chapitre 3 : Topologie des espaces vectoriels normés

Ce chapitre est le cœur de ce cours. Nous allons introduire la notion de norme et toute la topologie qui en découle.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Définitions

Nous voulons munir un ensemble d'une notion de distance. Nous connaissons la distance usuelle dans le plan ou l'espace, dite euclidienne. Si on veut regarder un espace différent, qu'est-ce que doit vérifier une bonne notion de distance ?

Définition 3.1

Soit E un ensemble. Une **distance** sur E est une application

$$d\ :\ E\times E\longrightarrow [0,+\infty[$$

vérifiant

- la distance sépare les points : $d(a,b)=0$ si et seulement si $a=b$,
- la distance est symétrique : $d(a,b)=d(b,a)$,
- l'inégalité triangulaire est vérifiée : $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$.

Exemples :

- la distance euclidienne $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ est bien une distance sur $\mathbb{R}^2$
- on munit $\mathbb{R}^2$ de la *distance SNCF* : la distance entre deux points A et B est soit la distance euclidienne classique $\|\overrightarrow{AB}\|$ si A et B sont alignés avec l'origine O, soit la somme $\|\overrightarrow{AO}\|+\|\overrightarrow{OB}\|$ sinon. Cette distance fournit une notion de proximité différente de la distance classique car deux points de $\mathbb{R}^2$ peuvent être proches au sens classiques mais loin pour la distance SNCF car il faut « passer par O ».
- On peut définir une distance entre deux mots comme le nombre minimal

> d'opérations (remplacements, ajouts ou suppressions de lettres) pour passer d'un mot à l'autre. Ainsi $d(\text{CHAT},\text{CHIOT}) = 2$. Cette distance peut être utile pour les corrections automatiques (saisies sur smartphone...).

Nous pouvons maintenant parler de distance pour de nombreux ensembles et les munir ainsi d'une géométrie dont on peut étudier les propriétés. Dans ce cours, nous allons être moins général. Nous allons nous concentrer sur les espaces vectoriels réels. Nous rappelons qu'un *espace vectoriel réel* est un ensemble E que l'on a muni d'une opération $+$ et de la multiplication par un scalaire de telle sorte que

- $(E,+)$ est un groupe abélien : il existe un élément neutre 0, la somme est commutative et associative et tout élément a un opposé.
- la multiplication par un scalaire réel est distributive et associative : $\lambda(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$, $(\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u$ et $(\lambda\mu).u = \lambda.(\mu.u)$. Par ailleurs, l'élément neutre de cette opération est 1, i.e. $1.u = u$.

On peut munir un espace vectoriel de tout un tas de distances. Mais il est intéressant que la notion de distance soit cohérente avec les opérations sur E. Pour ce faire, la notion fondamentale est la notion de norme.

Définition 3.2

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel. Une **norme** sur E est une fonction

$$x \in E \quad \longmapsto \quad \|x\| \in [0,+\infty[$$

telle que les propriétés suivantes soient vérifiées

- séparation : pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- homogénéité : pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
- inégalité triangulaire : pour tous $x,y \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit que $(E,\|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**.

La norme $\|x\|$ d'un point $x \in E$ peut être vue comme la distance de x à 0 ou comme la taille du vecteur de $\overrightarrow{0x}$. La notion de distance canonique induite par une norme est donnée par la proposition suivante. Ce qui est important est que cette distance respecte les propriétés géométriques fondamentales des espaces vectoriels normés comme l'invariance par translation ou dilatation.

Proposition 3.3 (distance induite par une norme)

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La fonction

$$d \;:\; (x,y) \in E^2 \quad \longmapsto \quad d(x,y) = \|x-y\|$$

est une distance sur E qui est invariante par translation et homogène pour les homothéties.

Démonstration : Par définition, $d(x,y) = \|x - y\|$ est à valeurs positives. La séparation découle immédiatement de celle de la norme car $d(x,y) = \|x-y\| = 0$ équivaut à $x - y = 0$. La distance est aussi symétrique car

$$d(y,x) = \|y - x\| = \|(-1).(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x,y)\ .$$

De même, l'inégalité triangulaire découle de celle de la norme :

$$d(x,z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z)\ .$$

L'invariance par translation se traduit juste par

$$d(x + c,y + c) = \|(x + c) - (y + c)\| = \|x - y\| = d(x,y)$$

et l'homogénéité par

$$d(\lambda x,\lambda y) = \|(\lambda x) - (\lambda y)\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\|x - y\| = |\lambda|d(x,y)\ .$$

$\square$

Les normes vérifient aussi des variantes de l'inégalité triangulaire de façon similaire à celles de la valeur absolue. Par exemple, en changeant y et $-y$ dans l'inégalité classique, on a

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|\ .$$

La version suivante est importante pour minorer une norme.

Proposition 3.4

Pour tout x et y dans un espace vectoriel normé,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \ \leq\ \|x - y\| \quad \text{et} \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \ \leq\ \|x + y\|$$

Démonstration : On a $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$ et donc $\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$. Si on change les rôles de x et y, on obtient $\|y\|-\|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$. On a donc la majoration de $\|x\| - \|y\|$ et de son opposé, quel que soit son signe et on obtient la première estimation. La deuxième se démontre en changeant y en $-y$. $\square$

Nous verrons dans les paragraphes suivants les exemples fondamentaux de ce cours. Donnons ici juste deux exemples triviaux.

Exemples :

- La valeur absolue $\|x\| = |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$. Dire cela signifie qu'on regarde $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel réel, à une dimension, c'est-à-dire une droite. Les termes d'une multiplication ont un statut particulier : le premier réel est un scalaire et le second un point de l'espace vectoriel. Ce constat est important en tant que cas particulier de ce qui sera vu dans $\mathbb{R}^d$.

- La distance SNCF sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas invariante par les translations du plan (l'origine jouant un rôle particulier). Cette distance n'est donc pas issue d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et est moins intéressante si le plan est considéré comme un espace vectoriel. Elle ne sera pas étudiée dans ce cours.

Maintenant que nous avons une distance, nous pouvons parler de ce qui est « proche », de « voisinage » etc.

Définition 3.5

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
La **boule ouverte** de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble

$$B(x,r) = \{y \in E \ , \ \ \|x - y\| < r\} \ .$$

La **boule fermée** de centre $x \in E$ et de rayon $r \geq 0$ est l'ensemble

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E \ , \ \ \|x - y\| \leq r\} \ .$$

La norme respectant la géométrie des espaces vectoriels, les boules vérifient aussi les propriétés associées.

Proposition 3.6

On peut passer d'une boule à l'autre par une translation et une homothétie. En particulier,

$$\forall x \in E \ , \ \ \forall r > 0 \ , \ \ B(x,r) = x + rB(0,1) \ .$$

Démonstration : Par homogénéité de la norme, $\|x\| < 1$ si et seulement si $\|rx\| < r$ et donc $rB(0,1) = B(0,r)$. Par ailleurs $\|(x + y) - x\| = \|y\|$ donc y est dans $B(0,r)$ si et seulement si $(x + y)$ est dans $B(x,r)$. De cette formule, on déduit comment passer d'une boule à l'autre

$$B(x',r') = \frac{r'}{r}B(x,r) + \big(x' - \frac{r'}{r}x\big) \ . \qquad \square$$

1.2 Exemples dans $\mathbb{R}^d$

Dans un espace vectoriel de dimension $d \geq 1$, on se repère par rapport aux coordonnées dans une base de d vecteurs. On peut donc toujours se ramener à $\mathbb{R}^d$ qui est le modèle de tout espace vectoriel de dimension finie. On peut munir $\mathbb{R}^d$ d'une infinité de normes différentes. Dans ce paragraphe, nous allons voir les normes p qui sont les plus importantes et peuvent servir de modèles pour construire les autres normes.

Commençons par le cas de deux normes dont l'expression est simple.

Définition 3.7

Dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), on appelle **norme infini** ou **norme du max** la fonction

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad \longmapsto \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|,|x_2|, \ldots, |x_d|) \ .$$

Proposition 3.8

La norme infini est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration : Il est clair que $\|x\|_\infty$ est un réel positif et que $\|(0,0,\ldots)\|_\infty = 0$. Si $\|x\|_\infty = 0$, alors le maximum des $|x_i|$ est nul. Comme chaque quantité est positive, c'est que tous les x_i sont nuls et donc $x = 0_{\mathbb{R}^d}$. L'homogénéité est aussi assez simple :

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_\infty &= \max(|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_d|) = \max(|\lambda||x_1|, \ldots, |\lambda||x_d|) \\ &= |\lambda| \max(|x_1|, \ldots, |x_d|) = |\lambda|\|x\|_\infty \ .\end{aligned}$$

Enfin, l'inégalité triangulaire découle de celle sur $\mathbb{R}$. Soient x et y donnés, notons i_0 une coordonnée telle que $|x_i + y_i|$ soit le plus grand possible (cette coordonnée existe car il n'y en a qu'un nombre fini). On a

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max(|x_1+y_1|, \ldots, |x_d+y_d|) = |x_{i_0}+y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \\ &\leq \max(|x_1|, \ldots, |x_d|) + \max(|y_1|, \ldots, |y_d|) = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \ .\end{aligned}$$

□

Définition 3.9

Dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), on appelle **norme 1** la fonction

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad \longmapsto \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d| \ .$$

Proposition 3.10

La norme 1 est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration : Les propriétés sont aussi évidentes que pour la norme infini, sauf l'inégalité triangulaire qui ne se montre pas exactement pareil :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= |x_1+y_1| + \ldots + |x_d+y_d| \leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_d| + |y_d| \\ &\leq |x_1| + \ldots + |x_d| + |y_1| + \ldots + |y_d| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \ .\end{aligned}$$

□

Ces deux normes induisent des notions de distance différentes. Imaginons une expérience ou un relevé statistique dont les résultats devraient former une liste de cent valeurs idéales $x = (x_1,x_2,\ldots,x_{100})$. Imaginons qu'il y ait des erreurs (de mesure, de fabrication...) et que la vraie liste soit $\tilde{x} = (x_1 + e_1,\ldots)$, i.e. la liste des erreurs est $e = \tilde{x}-x = (e_1,\ldots,e_{100})$. Si on mesure la taille de l'erreur en norme infini, on a $\|e\|_\infty$ qui est la plus grande de toutes les erreurs. Il suffit d'une seule erreur pour que cette distance $d_\infty(x,\tilde{x})$ soit grande. En outre, cette distance ne voyant que cette plus grande erreur, on ne voit pas s'il y a beaucoup de grandes erreurs dans la liste, ou juste une seule. Inversement la distance mesurée par la norme 1 est la somme de toutes les erreurs, donc la moyenne des erreurs à un facteur près. On voit mieux s'il y a beaucoup d'erreurs. Mais d'un autre côté, on ne sait pas s'il s'agit de beaucoup de petites erreurs acceptables ou bien d'une unique qui serait trop grande pour être tolérée.

e	$\|e\|_\infty$	$\|e\|_1$
$(1,0,0,\ldots,0)$	1	1
$(1,1,0,\ldots,0)$	1	2
$(1,1,1,\ldots,1)$	1	100
$(100,0,0,\ldots,0)$	100	100

Que dire de la norme euclidienne classique ? En fait, elle fait partie de la grande famille des normes p pour l'exposant $p = 2$. C'est aussi le cas de la norme 1 (pour $p = 1$). Le nom de la norme infini vient de ce qu'il s'agit de la limite $p \to +\infty$ dans la formule de la norme p.

Définition 3.11

Dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), pour $p \geq 1$, on appelle **norme** p la fonction

$$x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \quad \longmapsto \quad \|x\|_p = \big(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_d|^p\big)^{1/p} .$$

Pour démontrer qu'il s'agit en général d'une norme, on peut commencer par constater que l'homogénéité est vérifiée car

$$\|\lambda x\|_p = \big(|\lambda x_1|^p + \ldots + |\lambda x_d|^p\big)^{1/p} = \Big(|\lambda|^p\big(|x_1|^p + \ldots + |\lambda x_d|^p\big)\Big)^{1/p} = |\lambda|\|x\|_p .$$

Le point clef est l'inégalité triangulaire qui demande d'abord l'inégalité de Hölder.

Proposition 3.12 (inégalité de Hölder)

Soient x et y dans $\mathbb{R}^d$. Pour tous p et q dans $[1,+\infty]$ avec $1/p+1/q = 1$, on a

$$\|xy\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \;\leq\; \|x\|_p\|y\|_q .$$

Démonstration : Les cas $p = 1$ ou $p = +\infty$ sont particulier à cause de l'expression de la norme infini. Ces cas sont plus simples et comme de toute façon nous savons déjà que les normes 1 et infinie sont des normes, nous les laissons au lecteur. De même, les cas $x = 0$ ou $y = 0$ sont triviaux, donc on va supposer que toutes les normes sont non nulles.
On commence par utiliser que le logarithme est concave et donc que pour tout

$a,b > 0$, on a

$$\ln(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b \ .$$

L'exponentielle étant croissante, on peut l'appliquer de chaque côté de l'inégalité pour obtenir

$$\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q} \ .$$

Utilisons cette inégalité sur notre estimation. On va répartir un poids $\theta > 0$ à choisir plus tard en prenant $a = \theta|x_i|^p$ et $b = \theta^{-1}|y_i|^q$:

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{d} |(\theta x_i)(\theta^{-1} y_i)| \leq \sum_{i=1}^{d} \big(\frac{1}{p}\theta^p|x_i|^p + \frac{1}{q}\theta^{-q}|y_i|^q\big) = \frac{\theta^p}{p}\|x\|_p^p + \frac{\theta^{-q}}{q}\|y\|_q^q$$

Nous cherchons maintenant à optimiser cette estimation : plus le majorant sera petit, meilleure l'estimation sera. Quand $\theta \to 0$ ou $\theta \to +\infty$, le majorant tend vers $+\infty$. Le minimum se trouve au milieu. En dérivant, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\theta^p}{p}\|x\|_p^p + \frac{\theta^{-q}}{q}\|y\|_q^q\right) = \theta^{p-1}\|x\|_p^p - \theta^{-q-1}\|y\|_q^q \ .$$

Le minimum se trouve à l'endroit où la dérivée s'annule, qui correspond à $\theta^p\|x\|_p^p = \theta^{-q}\|y\|_q^q$. Comme $1/p + 1/q = 1$ et donc aussi $pq = p + q$, on obtient

$$\theta = \left(\frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p^p}\right)^{1/(p+q)} = \frac{\|y\|_q^{1/p}}{\|x\|_p^{1/q}} \ .$$

En utilisant que $p - p/q = p(1 - 1/q) = p/p = 1$ et l'expression symétrique, le majorant optimisé en θ devient

$$\begin{aligned}\frac{\theta^p}{p}\|x\|_p^p + \frac{\theta^{-q}}{q}\|y\|_q^q &= \frac{1}{p}\|x\|_p^{p-p/q}\|y\|_q + \frac{1}{q}\|x\|_p\|y\|_q^{q-q/p} \\ &= \big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\big)\|x\|_p\|y\|_q = \|x\|_p\|y\|_q \ .\end{aligned}$$

□

Proposition 3.13 (inégalité de Minkowski)

Pour tout $p \geq 1$ et pour tous x et y dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \ .$$

Démonstration : Le cas $p = 1$ a déjà été fait plus haut. Nous supposons donc $p \in \,]1, +\infty[$. Soit $q \in \,]1, +\infty[$ l'exposant conjugué, c'est-à-dire tel que

$1/p + 1/q = 1$. On écrit

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|.|x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|.|x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i|.|x_i + y_i|^{p-1} \; .$$

L'inégalité de Hölder nous donne que

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i|.|x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^{q(p-1)} \Big)^{1/q} \; .$$

Mais $q = 1/(1 - 1/p) = p/(p-1)$ et donc $q(p-1) = p$ et

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i|.|x_i + y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \|x+y\|_p^{p/q} \; .$$

Si on applique la même idée à l'autre terme, on obtient que

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p/q} \; .$$

Il reste à voir que $p - (p/q) = p(1 - 1/q) = p/p = 1$ pour simplifier de chaque côté les puissances de $\|x+y\|_p$. □

La proposition précédente étant exactement l'inégalité triangulaire pour la norme $p \geq 1$, nous avons bien démontré ce qu'il fallait pour obtenir le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 3.14

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, la norme p est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Attention que la même expression $\|x\|_p$ avec $p < 1$ ne donne pas une norme car l'inégalité triangulaire devient fausse. Les normes 1 et infinie sont donc les deux extrêmes de cette famille de normes.

Il est intéressant de regarder les différentes formes des boules données par ces normes. Il s'agit d'un exercice de géométrie assez simple pour le cas 1 et infini et on obtient des polygones ou polyèdres dans les deux cas. Évidemment, le cas $p = 2$ donne la boule classique. Les cas intermédiaires sont des interpolations de ces trois cas.

1.3 Espaces de fonctions

Ce cours considère aussi des espaces de dimension infinie. Nous regarderons simplement quelques espaces de fonctions comme exemples types.

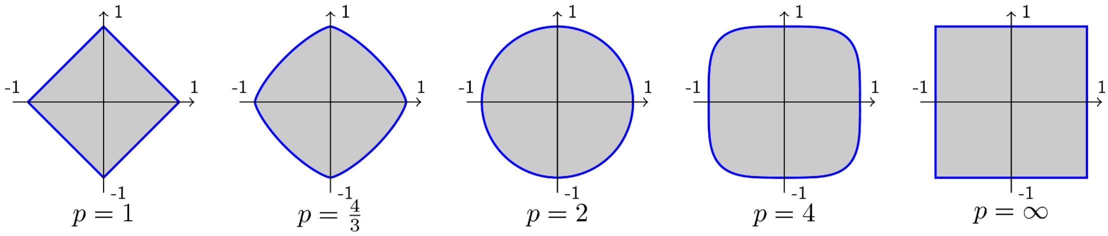


FIGURE 3.1 – *Les boules unités* $B_p(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p < 1\}$ *du plan.*

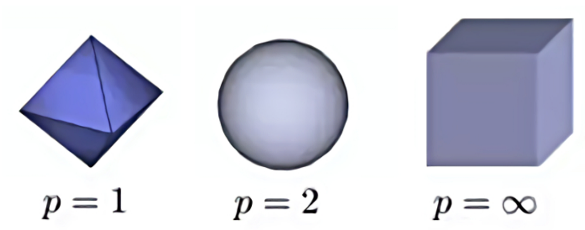


FIGURE 3.2 – *Les boules unités* $B_p(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_p < 1\}$ *de l'espace. La différence entre les cas* $p = 1$ *et* $p = \infty$ *devient plus claire.*

Proposition 3.15

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un domaine non vide et soit $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ bornées. Pour tout $f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)| \ .$$

L'espace $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration : On vérifie facilement que $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (la somme de fonctions bornées est bornée etc.). Le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme se vérifie comme pour la proposition 3.8. Il y a juste le cas de la somme où nous avons utilisé que le maximum était atteint dans $\mathbb{R}^d$. Ici, il faut revenir aux propriétés du sup. Nous prétendons que

$$\sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \in D} |g(x)| \ . \tag{3.1}$$

En effet, si $x \in D$, alors

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x' \in D} |f(x')| + \sup_{x' \in D} |g(x')| \ .$$

Le terme de droite est donc bien un majorant de $\{|f(x)+g(x)|\}$ et par définition de la borne sup, l'inégalité triangulaire (3.1) est vérifiée. □

Plutôt que ce résultat général, nous utiliserons surtout les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.16

Soient $a < b$ deux réels. L'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues réelles sur $[a,b]$, muni de la norme infini

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

est un espace vectoriel normé.

Démonstration : Il est facile de vérifier que $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est bien un espace vectoriel. Par ailleurs, si f est continue sur $[a,b]$ compact, alors f est bornée (cf le théorème 2.37). Donc $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Il reste maintenant à remarquer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur un espace E, alors c'est aussi une norme sur un sous-espace $F \subset E$ (c'est évident car toutes les conditions sont a fortiori vraies sur F qui est plus petit). La proposition 3.15 nous montre donc que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. $\square$

Corollaire 3.17

Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées, i.e.

$$\ell^\infty \;=\; \{\, u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M \,\} \;.$$

La norme infini définie par

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \;,\;\; \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \;.$$

est bien une norme sur ℓ^∞.

Démonstration : On applique la proposition 3.15 au cas $D = \mathbb{N}$. $\square$

Corollaire 3.18

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré d, il s'écrit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_dX^d$ et on pose $\|P\| = \max_i |a_i|$. Ceci définit bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration : Si on représente un polynôme par la suite de ces coefficients, on peut associé à chaque $P \in \mathbb{R}[X]$ une suite (a_n) de ℓ^∞ qui a en plus la propriété d'être nulle à partir d'un certain rang (car P n'a qu'un nombre fini de monômes) :

$$\mathbb{R}[x] \leftrightsquigarrow \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \;,\;\; \exists p \in \mathbb{N} \;,\;\; \forall i > p \;,\;\; a_i = 0\} \;.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace de ℓ^∞ et la norme proposée est exactement la norme $\|\cdot\|_\infty$ du corollaire 3.17. Ses propriétés sont a fortiori vraies si on les considère sur un espace plus petit et donc on a bien une norme sur l'espace des polynômes. $\square$

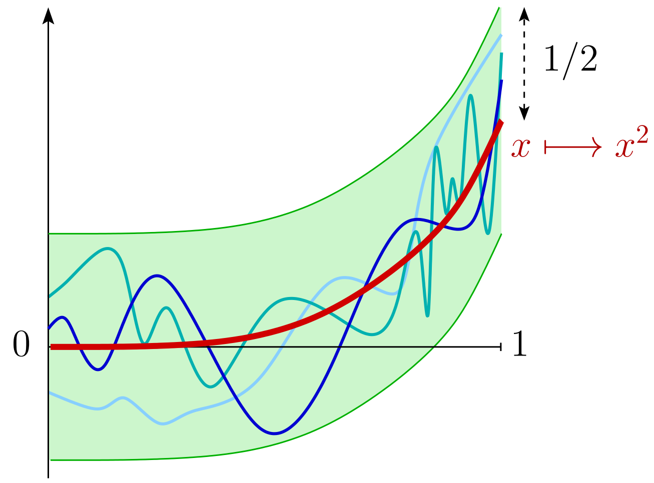


FIGURE 3.3 – *On considère $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme infini. La boule de centre $f : x \mapsto x^2$ et de rayon $1/2$ contient toutes les fonctions continues dont le graphe reste entre $x^2 - 1/2$ et $x^2 + 1/2$.*

On peut aussi munir $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ d'autres normes.

Proposition 3.19

Soient $a < b$ deux réels. L'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme 1

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

est un espace vectoriel normé.

Démonstration : Commençons par noter que sur un compact $[a,b]$, l'intégrale d'une fonction continue est toujours bien définie. L'inégalité triangulaire et l'homogénéité se déduisent des propriétés de la valeur absolue et de l'intégrale. Par exemple

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b \big(|f(x)|+|g(x)|\big)\mathrm{d}x$$

par l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et car l'intégrale est monotone. Puis la linéarité de l'intégrale implique que

$$\int_a^b \big(|f(x)|+|g(x)|\big)\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \;+\; \int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_1 + \|g\|_1 \;.$$

La subtilité ici est de montrer que si $\|f\|_1 = 0$, alors $f \equiv 0$. Pour cela, il nous faut utiliser que f est continue. Supposons que $f \not\equiv 0$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Soit $\varepsilon = |f(c)|/2 > 0$, par définition de la continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ avec $|x - c| < \delta$, on a $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. On obtient une minoration de $|f(x)|$ pour tout $x \in [a,b] \cap]c - \delta, c + \delta[$ en écrivant

$$|f(x)| = |f(c) + f(x) - f(c)| \geq |f(c)| - |f(x) - f(c)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \ .$$

Donc la fonction $|f|$ est positive sur $[a,b]$ et plus grande que $\varepsilon > 0$ sur un intervalle $[a,b] \cap]c - \delta, c + \delta[$ de longueur $\eta > 0$. Donc $\|f\|_1 \geq \varepsilon\eta > 0$. Par contraposée, si $\|f\|_1 = 0$, c'est que f est identiquement nulle. □

1.4 Espaces préhilbertiens

Les espaces préhilbertiens sont des structures importantes de l'analyse et de la géométrie. Dans ce cours, nous ne les étudierons pas en détail mais nous les verrons comme des cas particuliers d'espaces vectoriels normés.

Définition 3.20

Soit E un espace vectoriel. On dit que la fonction

$$(x,y) \in E^2 \ \longmapsto \langle x|y \rangle \in \mathbb{R}$$

est un **produit scalaire** sur E si

- symétrie : pour tous x et y dans E, $\langle y|x \rangle = \langle x|y \rangle$.
- bilinéarité : pour tout $y \in E$, la fonction $x \mapsto \langle x|y \rangle$ est linéaire. Ceci entraînant par symétrie que pour tout $x \in E$, la fonction $y \mapsto \langle x|y \rangle$ est aussi linéaire.
- positivité : pour tout x dans E, $\langle x|x \rangle \geq 0$.
- séparation : pour tout x dans E, $\langle x|x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Définition 3.21

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un **espace préhilbertien**.

Un espace préhilbertien est un cas particulier d'espace vectoriel normé car le produit scalaire engendre une norme naturelle. Sauf mention du contraire, cette norme associée sera la norme sur l'espace préhilbertien considéré.

Proposition 3.22

Soit E un espace préhilbertien. La fonction

$$x \in E \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

est une norme sur E.

Démonstration : Par positivité, l'expression $\sqrt{\langle x|x\rangle}$ est bien définie. La séparation de la norme vient directement de la séparation du produit scalaire. L'homogénéité se déduit de la bilinéarité puisque

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x|\lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x|\lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x|x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x|x\rangle} = |\lambda|\|x\| \ .$$

Avant de considérer l'inégalité triangulaire, nous allons généraliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz à tous les produits scalaires. Soit t un réel et x et y deux vecteurs. On sait que $\|x+ty\|^2$ est positif. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on développe

$$\begin{aligned}\|x+ty\|^2 &= \langle (x+ty)|(x+ty)\rangle = \langle x|(x+ty)\rangle + t\langle y|(x+ty)\rangle \\ &= \langle x|x\rangle + t\langle x|y\rangle + t\langle y|x\rangle + t^2\langle y|y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2t\langle x|y\rangle + t^2\|y\|^2 \ .\end{aligned}$$

Le développement montre qu'il s'agit d'un polynôme du second degré en t. S'il reste positif pour tout $t \in \mathbb{R}$, son discriminant doit être négatif ou nul. Donc

$$4\langle x|y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

ce qui donne

$$\big|\langle x|y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Pour montrer l'inégalité triangulaire, on reprend le développement ci-dessus pour $t = 1$ et l'inégalité qu'on vient de prouver et on écrit

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \ .$$

Il ne reste plus qu'à prendre la racine carrée de tous les termes (qui sont positifs). $\square$

Au passage de la démonstration ci-dessus, nous avons généralisé une inégalité qui nous est familière dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.23 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout x et y dans E, on a

$$\big|\langle x|y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\| \ .$$

Il y a égalité si et seulement si les deux vecteurs x et y sont colinéaires.

Démonstration : Il nous reste à regarder les cas d'égalité. Si x et y sont colinéaires, disons que $x = \lambda y$, alors un calcul direct nous montre qu'il y a égalité

$$\big|\langle x|y\rangle\big| = \big|\langle \lambda y|y\rangle\big| = \big|\lambda\langle y|y\rangle\big| = |\lambda|\|y\|^2 = \|\lambda y\|\|y\| = \|x\|\|y\| \ .$$

S'il y a égalité, c'est que le polynôme du second degré apparaissant dans la preuve de l'inégalité a un discriminant nul. Dans ce cas, on sait que le polynôme a exactement un zéro, c'est-à-dire qu'il existe t tel que $\|x+ty\|^2 = 0$. Par propriété de séparation, on a $x+ty = 0$ et donc x et y sont colinéaires. $\square$

Les deux exemples importants pour nous sont les suivants (démonstrations laissées au lecteur).

Proposition 3.24

Soit $d \geq 1$. L'espace $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

est un espace préhilbertien dont la norme associée est la norme $\|\cdot\|_2$.

Proposition 3.25

Soient $a < b$ deux réels. L'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

est un espace préhilbertien dont la norme associée est la norme

$$\|f\|_2 \ = \ \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \ .$$

Ce ne sont pas les seuls exemples que l'on a de produits scalaires. Par exemple, on peut simplement changer de base canonique dans $\mathbb{R}^d$ et/ou mettre des poids sur les coordonnées, comme prendre $\langle x|y\rangle = 2x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2)$. Mais la plupart des normes ne sont pas associées à des produits scalaires. Par exemple sur $\mathbb{R}^d$, alors il est impossible de trouver un produit scalaire induisant la norme p pour $p \neq 2$.

Il faut comprendre les espaces préhilbertiens comme des espaces vectoriels normés dans lesquels il y a une structure en plus donnée par le produit scalaire. Cette structure permet de parler d'angle, d'orthogonalité, de projection orthogonale... On peut par exemple avoir une version du théorème de Pythagore sur les fonctions : si f et g sont orthogonales, alors $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$. Ces notions sont absentes des espaces vectoriels normés sans produit scalaire. C'est pour cela que les normes 2 sont souvent privilégiés. Ainsi, on fait des interpolations suivant les moindres carrés, c'est-à-dire en mesurant les distances selon une norme 2. Si on mesure les distances avec la norme 1 ou infini, d'apparence plus simple, on perd l'outil important qui est la projection orthogonale et cela devient plus compliqué en pratique. Avec la norme 2, on aura au contraire des formules simples pour la projection.

Finissons avec une question de vocabulaire. Si ces espaces sont *pré*hilbertien, c'est qu'il existe des espaces dits *de Hilbert*. Ce sont des espaces préhilbertiens qui ont en plus la propriété d'être complets pour la norme du produit scalaire. Nous verrons cette notion en fin de cours. Par ce qui est de $\mathbb{R}^d$ muni d'un produit scalaire, on parle aussi d'espace *euclidien* (même si on n'a pas pris le produit scalaire classique). Ce nom correspond évidemment au fait que *Les Éléments* d'Euclide (probablement vers 300 av.J.C. en Grèce) forment un livre fondateur des mathématiques, incluant en particulier toute la géométrie du plan et de l'espace connue alors... qui correspond évidemment à la géométrie de la distance $\|\cdot\|_2$.

2 Topologie des espaces vectoriels normés : définitions de base

De façon générale, une topologie sur un ensemble est la donnée de ses ouverts. On définit ensuite les notions comme la convergence des suites, la continuité des fonctions etc. à l'aide des ouverts. Dans un espace vectoriel normé, il y a une notion d'ouvert naturellement associée aux boules ouvertes de la norme et de même qu'il y a une notion naturelle de convergence des suites. Ces deux notions sont compatibles et on aura souvent plusieurs définitions équivalentes : une utilisant la notion de boule ouverte et une utilisant les suites. Si on travaille dans des espaces plus généraux, seule la première est la « bonne » caractérisation. On fera parfois des remarques en ce sens pour les lecteurs qui ont déjà vu ou verront une notion de topologie plus générale. Mais pour ce cours, les deux façons de faire seront équivalentes et toutes les deux correctes.

Dans toute cette partie, on travaille dans un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$. Comme dit plus haut, mathématiquement parlant, une topologie est la donnée des ouverts d'un ensemble. Les fermés sont par définition les complémentaires des ouverts.

Définition 3.26

Un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset E$ est dit **ouvert** si pour tout point x de $\mathcal{O}$, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouvert $B(x,r)$ soit incluse dans $\mathcal{O}$.
Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset E$ est dit **fermé** si son complémentaire $\mathcal{F}^C$ est ouvert.

Nos premiers exemples sont assez simples mais universels.

Proposition 3.27

Les ensembles E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés dans E.

Démonstration : Comme toute boule $B(x,r)$ est incluse dans l'espace E par définition, E est clairement ouvert. Par ailleurs, l'ensemble vide vérifie toute proposition commençant par « pour tout x dans l'ensemble » puisqu'il n'y a aucun x dedans et donc aucune condition à vérifier. Donc $\emptyset$ est aussi un ouvert. Par complémentaire, E et $\emptyset$ sont aussi des fermés. $\square$

Proposition 3.28

Soit $x \in E$ et $r > 0$. La boule ouverte $B(x,r)$ est un ouvert de E et la boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de E.

Démonstration : Soit $y \in B(x,r)$. On pose $\rho = r - \|x-y\|$. Par définition de la boule ouverte, on a $\rho > 0$. Soit $z \in B(y,\rho)$. L'inégalité triangulaire implique que

$$\|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| < \|x-y\| + \rho = r \ .$$

Donc z est dans la boule $B(x,r)$. Ceci montre que $B(y,\rho) \subset B(x,r)$ et donc que $B(x,r)$ est un ouvert de E.
Soit y qui est dans le complémentaire de $\overline{B}(x,r)$. Par définition, on doit avoir $\|x-y\| > r$. On pose $\rho = \|x-y\| - r$. Soit $z \in B(y,\rho)$. La deuxième version de l'inégalité triangulaire implique que

$$\|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \geq \|x-y\| - \|y-z\| > \|x-y\| - \rho = r \ .$$

Donc z n'est pas dans la boule $\overline{B}(x,r)$. Ceci montre que $B(y,\rho) \subset \overline{B}(x,r)^C$ et donc que $\overline{B}(x,r)^C$ est un ouvert de E. Par définition, $\overline{B}(x,r)$ est donc un fermé de E. $\square$

Nous allons tout de suite donner une caractérisation équivalente des fermés à l'aide des suites convergentes.

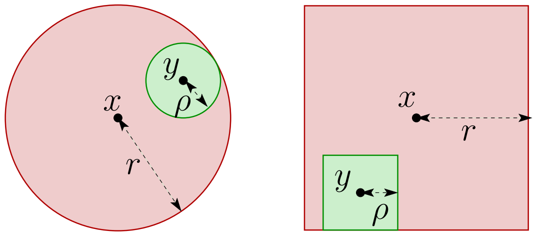


FIGURE 3.4 – *Une illustration de la preuve que la boule ouverte est ouverte : à gauche dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, à droite dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infini.*

Définition 3.29

Une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé E **converge vers** $\ell \in E$ si

$$\|x_n - \ell\| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \ .$$

Une suite qui converge vers un point $\ell \in E$ est dite **convergente**. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme infini, une suite $(x_n) \subset \mathbb{R}^d$ tend vers ℓ si et seulement si chaque coordonnée de x_n converge vers la coordonnée correspondante de ℓ. Plus précisément, pour tout n, on écrit $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d)$ et $\ell = (\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^d)$. Si $x_n \to \ell$, alors on a $\|x_n - \ell\|_\infty \to 0$ par définition. Comme pour tout i, on a $|x_n^i - \ell^i| \leq \|x_n - \ell\|_\infty$, cela montre la convergence coordonnée par coordonnée. Supposons maintenant que la $x_n^i \to \ell^i$ pour tout $i = 1, \ldots, d$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout i, il existe un rang N_i tel que $|x_n^i - \ell^i| < \varepsilon$ (convergence dans $\mathbb{R}$). On pose $N = \max_i N_i$, on a alors pour tout $n \geq N_i$, $\|x_n - \ell\|_\infty = \max_i |x_n^i - \ell^i| < \varepsilon$.

La caractérisation suivante pourra être utilisée comme définition équivalente dans les espaces vectoriels normés (mais pas dans les espaces topologiques généraux). Comme son énoncé fait intervenir un test par des suites, on parle de *caractérisation séquentielle* des fermés.

Proposition 3.30

Un ensemble $\mathcal{F} \subset E$ est fermé si et seulement si toute limite $\ell \in E$ d'une suite convergente $(x_n) \subset \mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ un fermé de E, par définition $\mathcal{F}^C$ est ouvert. Soit (x_n) une suite qui converge vers $\ell \in E$. Si $\ell \in \mathcal{F}^C$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(\ell, r)$ est incluse dans $\mathcal{F}^C$. Par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x_n - \ell\| < r$. Ceci montre que la suite (x_n) finit dans la boule $B(\ell, r)$ et donc n'est plus dans $\mathcal{F}$. Si la suite (u_n) est toute

incluse dans $\mathcal{F}$, sa limite est donc aussi dans $\mathcal{F}$ (c'est la contraposée de ce qu'on vient de démontrer).
Soit maintenant $\mathcal{F} \subset E$ un ensemble tel que toute suite $(u_n) \subset \mathcal{F}$ qui converge dans E a sa limite dans $\mathcal{F}$. Soit $x \notin \mathcal{F}$. Supposons qu'il n'existe aucune boule $B(x,1/n)$ incluse dans $\mathcal{F}^C$. Alors pour tout n, il doit exister au moins un point $x_n \in B(x,1/n) \cap \mathcal{F}$. Mais comme $\|x_n - x\| < 1/n$, la suite (x_n) converge vers x tout en étant dans $\mathcal{F}$. Par hypothèse, on doit avoir $x \in \mathcal{F}$, ce qui est absurde. Donc il existe forcément n tel que $B(x,1/n) \subset \mathcal{F}^C$. On vient de montrer que $\mathcal{F}^C$ est ouvert et donc que $\mathcal{F}$ est fermé. $\square$

Notons bien qu'on prend dans la proposition ci-dessus une suite convergente de $\mathcal{F}$ mais dont la limite n'est pas a priori dans $\mathcal{F}$. Mais pour un ensemble fermé, la suite ne peut s'en « échapper » et la limite reste dans $\mathcal{F}$.

Exemples :

- Dans un espace vectoriel normé E, un singleton $\{x\} \subset E$ est toujours un fermé de E. En effet, la seule suite possible incluse dans E est la suite constante égale à x qui converge vers x qui est bien dans E.

- Remontrons qu'une boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est fermée par la caractérisation séquentielle. Soit (x_n) une suite de points de $\overline{B}(x,r)$ qui converge vers $\ell \in E$. On a

$$\|\ell - x\| = \|(\ell - x_n) + (x_n - x)\| \leq \|\ell - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \|\ell - x_n\| + r \ .$$

  En passant à la limite $n \to +\infty$, on trouve $\|\ell - x\| \leq r$ et donc ℓ est bien dans la boule $\overline{B}(x,r)$.

- La droite horizontale $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infini. En effet, si une suite $u_n = (x_n,0)$ converge vers $\ell = (x,y)$, on doit avoir $\max(|x - x_n|,|y|) \to 0$ et donc $y = 0$. La limite est donc bien dans $\mathbb{R} \times \{0\}$.

- On se place dans $\mathbb{R}$. Un intervalle $]a,b[$ est un ouvert car c'est la boule ouverte $B\big(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}\big)$. De la même façon, un intervalle $[a,b]$ est un fermé car c'est une boule fermée. Montrons que $[a,b[$ n'est ni ouvert ni fermé. La suite $u_n = b - (b-a)2^{-n}$ est dans $[a,b[$ et tend vers $b \notin [a,b[$, donc $[a,b[$ n'est pas fermé. Mais la suite $u_n = a - 2^{-n}$ est dans $[a,b[^C$ et tend vers $a \in [a,b[$, donc $[a,b[^C$ n'est pas fermé et donc son complémentaire $[a,b[$ n'est pas ouvert.

Le statut d'ouvert ou fermé passe bien aux intersections et unions finies. Par contre, il faut faire attention aux intersections et unions infinies. Le plus simple est de se rappeler qu'il y a des pièges et de retenir deux contre-exemples pour les unions et intersections infinies (voir ci-dessous), ce qui permet de savoir lesquels ne marchent pas.

Proposition 3.31

Soit $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts de cardinal quelconque. Alors l'union $\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j$ est un ouvert de E.
Soit $p\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{O}_n$, $n=0,\ldots,p$ un nombre fini d'ouverts. Alors l'intersection $\mathcal{O}_0\cap\mathcal{O}_1\cap\ldots\cap\mathcal{O}_p$ est un ouvert.

Soit $(\mathcal{F}_j)_{j\in J}$ une famille de fermés de cardinal quelconque. Alors l'intersection $\bigcap_{j\in J}\mathcal{F}_j$ est un fermé de E.
Soit $p\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{F}_n$, $n=0,\ldots,p$ un nombre fini de fermés. Alors l'union $\mathcal{F}_0\cup\mathcal{F}_1\cup\ldots\cup\mathcal{F}_p$ est un fermé.

Démonstration : Soit $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ une famille d'ouverts et soit $x\in\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j$. Par définition, x appartient à un $\mathcal{O}_{j_0}$ qui est ouvert. Il existe donc une boule $B(x,r)$ incluse dans $\mathcal{O}_{j_0}$ et donc a fortiori dans $\bigcup_{j\in J}\mathcal{O}_j$. Ceci montre la première assertion.
Soit $\mathcal{O}_n$, $n=0,\ldots,p$ un nombre fini d'ouverts et soit $x\in\mathcal{O}_0\cap\ldots\cap\mathcal{O}_p$. Pour tout $n=0,\ldots,p$, il existe un rayon $r_n>0$ tel que $B(x,r_n)\subset\mathcal{O}_n$. Soit $r=\min_{n=1\ldots p}r_n$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de rayons, le min est bien atteint et r est strictement positif. Par construction, la boule $B(x,r)$ est dans tous les $\mathcal{O}_n$ et donc dans leur intersection. Ceci montre la deuxième assertion.
Les propriétés sur les fermés s'obtiennent en passant au complémentaire les propriétés sur les ouverts. $\square$

Exemples :

- Un ensemble fini $\{x_1,\ldots,x_p\}$ de points de E est un fermé de E par union finie de singleton.
- L'ensemble $\{2^{-j},j\in\mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est une union dénombrables de fermés qui n'est pas fermée. En effet, la suite $u_n=2^{-n}$ est incluse dans l'ensemble mais sa limite 0 n'y est pas.
- L'ensemble $\cup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$ est un ouvert comme union (infinie) d'ouverts. Son complémentaire $\mathbb{Z}$ est donc fermé (ne pas déduire que $\mathbb{Z}$ est fermé comme l'union de singletons fermés $\cup_{n\in\mathbb{Z}}\{n\}$ puisqu'il s'agit d'une union infinie !).
- On voit facilement que l'intersection infinie d'intervalles ouverts $\cap_{n\in\mathbb{N}}]-2^{-n},2^{-n}[$ se réduit à $\{0\}$. Or $\{0\}$ n'est pas ouvert puisqu'aucune boule $B(0,r)=]-r,r[$ avec $r>0$ n'est entièrement incluse dans $\{0\}$. Donc une intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément ouverte.

À chaque ensemble quelconque, on peut associer une partie ouverte et une partie fermée comme suit.

Définition 3.32

Soit $A \subset E$ un ensemble. On appelle **intérieur** de A et on note $\mathring{A}$ ou $\mathrm{Adh}(A)$ le plus grand ouvert de E inclus dans A, c'est-à-dire $\mathring{A}$ est l'union de tous les ouverts inclus dans A.
On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$ le plus grand fermé de E contenant A, c'est-à-dire $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A.
Soit $A \subset E$. On appelle **frontière** de A et on note ∂A (prononcer « d rond A ») l'ensemble

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A} .$$

Cette définition contient en fait une propriété à démontrer : que l'union de tous les ouverts $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ tels que $\mathcal{O}_j \subset A$ est bien le plus grand ouvert inclus dans A. Il s'agit bien d'un ouvert comme union d'ouverts et il est inclus dans A car chaque $\mathcal{O}_j$ est inclus dans A. La notion de « plus grand » vient de l'ordre de l'inclusion : si $\mathcal{O}$ est un ouvert contenu dans A, c'est un des $\mathcal{O}_j$ et donc il est plus petit que l'union totale. La propriété analogue pour l'adhérence se fait en passant au complémentaire.

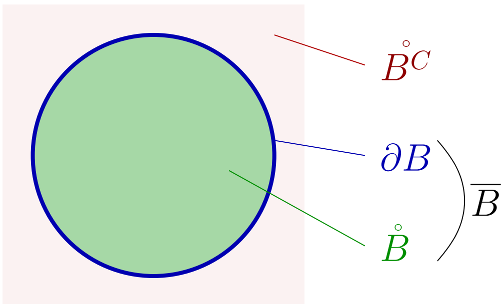


FIGURE 3.5 – *Les différents ensembles topologiques associés à une boule B, qu'elle soit ouverte ou fermée.*

De manière assez évidente, on a aussi la proposition suivante.

Proposition 3.33

Un ensemble A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$. Un ensemble A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration : Si $A = \mathring{A}$, A est ouvert car son intérieur est par définition un ouvert. Si A est ouvert, il est difficile de faire un plus grand ouvert inclus dans A que A. Le cas fermé/adhérence est similaire. $\square$

Il existe des caractérisations pratiques pour les espaces vectoriels normés.

Proposition 3.34

Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E. L'intérieur de A est l'ensemble des centres de boules incluses dans A, i.e.

$$\mathring{A} \; = \; \{ \, x \in A \mid \exists r > 0 \, , \, B(x,r) \subset A \, \} \; .$$

L'adhérence de A est par symétrie

$$\overline{A} \; = \; \{ \, x \in E \mid \forall r > 0 \, , \, B(x,r) \cap A \neq \emptyset \, \} \; .$$

C'est aussi l'ensemble des limites de suites de A, i.e.

$$\overline{A} \; = \; \{ \, x \in E \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \;\; a_n \longrightarrow x \, \} \; .$$

On peut aussi montrer qu'un ensemble F est l'adhérence de A en montrant qu'il s'agit d'un fermé contenant A dont tous les points sont limite d'une suite de A.
Concernant la frontière, on a que

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C} = E \setminus \left(\mathring{A} \cup \mathring{A^C} \right) \; .$$

et qu'elle se caractérise aussi comme l'ensemble des points x qui sont à la fois limite d'une suite de A et d'une suite de son complémentaire ou bien par

$$\partial A = \{ x \in E \; , \;\; \forall r > 0, \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap A^C \neq \emptyset \} \; .$$

Démonstration : Si x est le centre d'une boule ouverte $B(x,r)$ incluse dans A, alors $B(x,r)$ étant un ouvert inclus dans A, on a $B(x,r) \subset \mathring{A}$. Ceci montre que $x \in \mathring{A}$. Réciproquement, supposons que $x \in \mathring{A}$. Comme $\mathring{A}$ est un ouvert, on doit avoir un rayon $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathring{A}$. Comme $\mathring{A}$ est inclus dans A, on a bien $B(x,r) \subset A$.
La première caractérisation de $\overline{A}$ se fait par le complémentaire. En effet, $\overline{A}$ est le complémentaire de l'intérieur de A^C. Donc $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il n'existe pas de rayon $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A^C$, i.e. si et seulement si $B(x,r) \cap A$ est non vide pour tout $r > 0$.
Montrons la deuxième caractérisation de $\overline{A}$. Soit x la limite d'une suite (a_n) de points de A. Comme $\overline{A}$ contient A, on a $(a_n) \subset \overline{A}$. Mais comme $\overline{A}$ est fermé, on trouve que la limite x est dans $\overline{A}$. Réciproquement, supposons que $x \in \overline{A}$. On considère la boule $B(x,2^{-n})$. D'après la caractérisation précédente, il existe $a_n \in A \cap B(x,2^{-n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc une suite $(a_n) \subset A$ qui converge vers x par construction.
Si F est un fermé contenant A alors il contient $\overline{A}$. Mais si tous ses points sont limites d'une suite de A, alors la caractérisation précédente montre que $\overline{A} \subset F$. Donc $F = \overline{A}$.
Pour la frontière, on utilise les propriétés des intérieurs et adhérences. Par définition $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ ce qui est la même chose que $\overline{A} \cap (\mathring{A})^C = \overline{A} \cap \overline{(A^C)}$.

L'expression avec les intérieurs se trouve en passant au complémentaire. La deuxième partie se montre avec les caractérisations de l'adhérence de la proposition 3.34. □

Enfin, énonçons les règles sur les unions et intersections. Nous donnerons des contre-exemples à toutes les propositions non-énoncées ci-dessous.

Proposition 3.35

Soient A et B deux ensembles de E. On a :

- si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$,
- $\text{Int}(A)^C = \text{Adh}(A^C)$ et $\text{Adh}(A)^C = \text{Int}(A^C)$.
- $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$ et $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$,
- $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ et $\text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$.

Toutes les règles ci-dessus pour deux ensembles A et B passent par récurrences à un nombre fini d'ensembles.

Démonstration : Supposons que $A \subset B$. L'intérieur de A est un ouvert inclus dans A et a fortiori dans B. Il est donc inclus dans l'intérieur de B qui est le plus grand ouvert ayant cette propriété. L'adhérence de B est un fermé qui contient B et donc il contient a fortiori A. Il contient alors l'adhérence de A qui est le plus petit fermé ayant cette propriété.
L'ensemble $\text{Int}(A)^C$ est le complémentaire d'un ouvert contenu dans A, c'est donc un fermé contenant A^C. Soit F un autre fermé contenant A^C, F^C est un ouvert contenu dans A et donc il doit être contenu dans $\text{Int}(A)$. Donc F doit contenir $\text{Int}(A)^C$. Ceci montre que $\text{Int}(A)^C = \text{Adh}(A^C)$. L'autre propriété est similaire.
Soient A et B quelconques. On a $\text{Int}(A) \subset A$ et $\text{Int}(B) \subset B$. Donc $(\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)) \subset (A \cap B)$. Comme il s'agit d'un ouvert comme intersection de deux ouverts, on a $(\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)) \subset \text{Int}(A \cap B)$. Par ailleurs, $(A \cap B) \subset A$ donc $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A)$ et de même $\text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(B)$. Donc $\text{Int}(A \cap B) \subset (\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B))$. On vient de montrer que $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.
Si $x \in \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, soit $x \in \text{Int}(A) \subset A$, soit $x \in \text{Int}(B) \subset B$. Donc $(\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)) \subset (A \cup B)$. Comme $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ est un ouvert comme union d'ouverts, on a forcément $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$.
Nous laissons la démonstration des propriétés de l'adhérence en exercice au lecteur (ou au passage par complémentaire). Le passage à un nombre fini d'ensembles se fait par récurrence sur le mode $\text{Int}(A \cap B \cap C) = \text{Int}(A \cap B) \cap \text{Int}(C) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \cap \text{Int}(C)$. □

Exemples :

- Comme $\emptyset$ et E sont tous les deux à la fois ouverts et fermés, ils sont leur propres intérieurs et adhérences.
- On a vu qu'un singleton $\{x\}$ est fermé, son adhérence est donc lui-même. Si E

n'est pas l'espace vectoriel trivial réduit à $\{0\}$, il existe au moins un point $y \neq 0$. La suite $u_n = x + 2^{-n}y$ vérifie $u_n \neq x$ et $\|u_n - x\| = \|2^{-n}y\| = 2^{-n}\|y\| \to 0$. Donc $(u_n) \subset \{x\}^C$ mais (u_n) converge vers $x \notin \{x\}^C$. Donc le complémentaire de $\{x\}$ n'est pas fermé et $\{x\}$ n'est pas ouvert. Donc $\mathrm{Int}(\{x\}) \neq \{x\}$. Comme l'intérieur est inclus dans l'ensemble, il ne reste plus que le choix $\mathrm{Int}(\{x\}) = \emptyset$.

- Soit $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un nombre dénombrables de points. On évite le cas trivial $E = \{0\}$ donc il existe $y \neq 0$. On pose $z = y/\|y\|$. On a $\|z\| = \left\|\frac{1}{\|y\|}y\right\| = \frac{1}{\|y\|}\|y\| = 1$. Donc toute boule $B(x_i,r)$ contient le segment $\{x_i + \lambda z,\, \lambda \in \,]-r,r[\}$. Ce segment étant en bijection avec $]-r,r[$ qui est de cardinal indénombrable, il contient forcément plus de points que A. Ceci montre que A ne peut contenir aucune boule et donc que $\mathring{A} = \emptyset$. Si $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$ est un ensemble fini de points, il est fermé et $\overline{A} = A$. Mais si A n'est pas fini, on ne peut rien dire de général : $A = \mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ mais $A = \{2^{-n}\}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

- Soit $B(x,r)$ une boule ouverte de E. Comme c'est un ouvert, son intérieur est elle-même. Montrons que son adhérence est la boule fermée $\overline{B}(x,r)$. Cette dernière est un fermé qui contient $B(x,r)$, donc on a $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$. Il suffit de montrer que tous les points de $\overline{B}(x,r)$ sont dans l'adhérence, par exemple en montrant qu'ils sont limites de points de la boule ouverte. Soit x^* un point de $\overline{B}(x,r)$ qui n'est pas dans la boule $B(x,r)$ (sinon c'est déjà fini). On a forcément $\|x^* - x\| = r$. Soit $x_n = 2^{-n}x + (1 - 2^{-n})x^*$. On a $\|x_n - x\| = (1 - 2^{-n})\|x^* - x\| = (1 - 2^{-n})r < r$ et donc (x_n) est bien une suite de la boule ouverte. Comme $\|x^* - x_n\| = \|2^{-n}(x - x^*)\| = 2^{-n}r$, la suite (x_n) tend bien vers x^*. D'après la Proposition 3.34, x^* est bien dans l'adhérence de la boule ouverte.

- Soit $\overline{B}(x,r)$ une boule fermée de E. Comme c'est un fermé, elle est sa propre adhérence. Montrons que son intérieur est la boule ouverte. Comme la boule ouverte est ouverte, on a forcément que $B(x,r) \subset \mathrm{Int}(\overline{B}(x,r))$. Montrons qu'un point x^* avec $\|x^* - x\| = r$ ne peut être dans l'intérieur de la boule fermée. Prenons une boule $B(x^*,\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$. Cette boule contient le point $y = x + (1 + \varepsilon/2r)(x^* - x)$ car $\|y - x^*\| = \varepsilon/2r\|x^* - x\| = \varepsilon/2$. Mais y n'est pas dans $\overline{B}(x,r)$ car $\|y - x\| = (1 + \varepsilon/2r)\|x^* - x\| = r + \varepsilon/2 \geq r$. D'après la Proposition 3.34, x^* ne peut être dans l'intérieur de la boule fermé.

- Les deux exemples précédents montre que la frontière d'une boule ouverte ou fermée est la sphère (cf figure 3.3.5).

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et donc son adhérence est $\mathbb{R}$. Mais comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, l'argument plus haut montre que son intérieur est vide. La frontière de $\mathbb{Q}$ est donc $\mathbb{R}$. On obtient au passage un exemple montrant que l'intérieur de l'adhérence n'est pas l'intérieur de l'ensemble en général (il ne s'agit pas d'opérations réciproques ou même qui pourraient commuter).

- Voici les contre-exemples pour les propriétés manquantes de la proposition 3.35 pour deux ensembles. Soient $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$. Comme $\mathrm{Int}([a,b]) =]a,b[$ (les intervalles sont des boules de $\mathbb{R}$), on a $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) =]0,1[\cup]1,2[\neq$

Int$(A \cup B) =]0,2[$. De façon similaire, soit $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$. Comme $\mathrm{Adh}(]a,b[) = [a,b]$, on a $\mathrm{Adh}(A \cap B) = \mathrm{Adh}(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B) = \{1\}$.

- Les égalités de la proposition 3.35 ne passent pas aux unions ou intersections infinies. Par exemple sur $\mathbb{R}$, si on considère l'intersection $\{0\} = \cap_n]-1/n,1/n[$, alors l'intérieur de $\{0\}$ est vide mais l'intersection des intérieurs de $]-1/n,1/n[$ est encore $\{0\}$. Inversement, si on regarde l'union $[0,1[= \cup_n [0,1-1/n]$, son adhérence est $[0,1]$ alors que l'union des adhérences des $[0,1-1/n]$ reste $[0,1[$.

On peut facilement généraliser aux espaces vectoriels normés les deux définitions suivantes qui étaient connues sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.36

Un ensemble A d'un espace vectoriel normé E est **borné** si

$$\exists M > 0 \ , \ \ \forall a \in A \ , \ \ \|a\| \leq M \ .$$

Définition 3.37

Un ensemble $A \subset E$ est dit **dense** dans E si $\overline{A} = E$.

On obtient facilement les caractérisations équivalentes suivantes.

Proposition 3.38

Un ensemble $A \subset E$ est borné si et seulement s'il est inclus dans une boule ouverte ou fermé de E.

Démonstration : Si A est borné avec la borne $M > 0$, il est inclus dans la boule ouverte $B(0,M)$ et dans la boule fermée $\overline{B}(0,M)$. Soit A inclus dans la boule ouverte (ou fermée) $B(x,r)$. Pour tout $a \in A$, on a $\|a\| = \|(a-x)+x\| \leq \|a-x\|+\|x\| \leq r+\|x\|$. Donc l'ensemble A est borné avec la borne $M = r+\|x\|$ (ou une borne plus grande). $\square$

Proposition 3.39

Soit $A \subset E$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est dense dans E

ii) tout $x \in E$ est limite d'une suite $(a_n) \subset A$ de points de A.

iii) toute boule ouverte $B(x,r)$ de E contient un élément de A.

Démonstration : Il s'agit d'appliquer les caractérisations de l'adhérence de la proposition 3.34. $\square$

Exemple :

Montrons que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme 1. Soit $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (chapitre précédent), il existe d rationnels $q_i \in \mathbb{Q}$ tels que $q_i \in \left]x_i - \frac{r}{d}, x_i + \frac{r}{d}\right[$. On pose $q = (q_1, \ldots, q_d)$ qui est dans $\mathbb{Q}^d$. On a

$$\|x - q\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i - q_i| < \sum_{i=1}^{d} \frac{r}{d} = r \ .$$

Donc q est dans la boule $B(x,r)$, ce qui montre que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$.

3 Suites d'un espace vectoriel normé

On a déjà vu plus haut la définition de convergence des suites au sens de la norme, qui est pour rappel comme suit.

Définition 3.40

Une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé E **converge vers** $\ell \in E$ si

$$\|x_n - \ell\| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \ .$$

Si on imagine bien la même définition quand on n'a pas de norme mais seulement une distance, c'est moins évident si on a un espace topologique sans notion de distance. Dans ce cas, on utilise comme définition la caractérisation suivante qui n'utilise que les ouverts.

Proposition 3.41

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite (x_n) de E converge vers $\ell \in E$ si et seulement si pour tout $r > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in B(\ell,r)$ pour tout $n \geq N$.
De manière plus générale, une suite (x_n) de E converge vers $\ell \in E$ si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de E contenant ℓ, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq N$.

Démonstration : La caractérisation avec les boules ouvertes est juste une traduction géométrique de

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists N \in \mathbb{N} \ , \quad \forall n \geq N \ , \quad \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

(où $r > 0$ remplace $\varepsilon > 0$ comme variable muette). Si (x_n) entre à partir d'un certain rang dans tout ouvert contenant ℓ, alors elle entre a fortiori dans toute boule ouverte contenant ℓ. Pour montrer la réciproque, supposons que la suite entre dans toute boule ouverte contenant ℓ. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant ℓ. Par définition des ouverts, il existe une boule ouverte $B(\ell,r) \subset \mathcal{O}$. Comme (u_n)

finit dans $B(\ell,r)$, elle finit bien par entrer dans $\mathcal{O}$. $\square$

Exemple :
On retrouve la caractérisation séquentielle des fermés. En effet, si F est fermé, alors F^C est ouvert. Si $\ell \in F^C$ est la limite d'une suite (x_n), alors la suite (x_n) doit finir dans l'ouvert F^C. Par contraposée, si ℓ est la limite d'une suite $(x_n) \subset F$, alors $\ell \in F$.

Dans le cas des espaces munis d'une distance, on peut parler de la limite d'une suite.

Proposition 3.42

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soient ℓ et ℓ' deux limites d'une même suite (x_n). Alors $\ell = \ell'$.

Démonstration : On a

$$\|\ell - \ell'\| = \|(\ell - x_n) - (\ell' - x_n)\| \leq \|\ell - x_n\| + \|\ell' - x_n\| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \ .$$

Donc $\|\ell - \ell'\| = 0$ et $\ell = \ell'$ par propriété de séparation. $\square$

La propriété suivante peut s'interpréter comme la continuité de la norme pour sa propre topologie.

Proposition 3.43

Soit (x_n) une suite convergente d'un espace vectoriel normé E. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = \left\| \lim_{n \to +\infty} x_n \right\| .$$

Démonstration : Soit ℓ la limite de la suite. La variante minorante de l'inégalité triangulaire nous dit que $\|x_n - \ell\| \geq \big| \|x_n\| - \|\ell\| \big|$. Comme $\|x_n - \ell\|$ tend vers 0, on a que $\|x_n\| - \|\ell\| \to 0$ par théorème des gendarmes sur $\mathbb{R}$. $\square$

Définition 3.44

Une suite $(x_n) \subset E$ est dite **bornée** si $\{u_n\}$ est borné, c'est-à-dire s'il existe M tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout n.

Proposition 3.45

Une suite convergente d'un espace vectoriel normé est bornée.

Démonstration : La propriété suit directement du fait que la norme de la suite converge et de la propriété que les suites réelles convergentes sont bornées. □

Les résultats sur les manipulations des limites de suites ne cachent pas de surprises. N'oublions pas ici que pour un espace vectoriel, les deux seuls manipulations sont les sommes et les homothéties.

Proposition 3.46

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de E qui convergent vers u_∞ et v_∞. Alors la suite (u_n+v_n) converge vers la somme des limites $u_\infty+v_\infty$.
Si de plus (λ_n) est une suite de scalaires convergeant vers $\lambda_\infty\in\mathbb{R}$, alors $(\lambda_n u_n)$ est une suite convergente vers $\lambda_\infty u_\infty$.
En corollaire, la limite d'une combinaison linéaire (finie) est la combinaison linéaire des limites.

Démonstration : La première propriété vient de l'inégalité triangulaire

$$\|(u_n+v_n)-(u_\infty+v_\infty)\|=\|(u_n-u_\infty)-(v_n-v_\infty)\|\le\|u_n-u_\infty\|+\|v_n-v_\infty\|\to 0\ .$$

Pour la deuxième propriété, nous allons utiliser que les suites de $\mathbb{R}$ et de E qui convergent sont bornées. Soit M tel que $\|u_n\|\le M$ et $|\lambda_n|\le M$ pour tout n. On a

$$\begin{aligned}\|\lambda_n u_n-\lambda_\infty u_\infty\| &= \|\lambda_n(u_n-u_\infty)+(\lambda_n-\lambda_\infty)u_\infty\|\\ &\le \|\lambda_n(u_n-u_\infty)\|+\|(\lambda_n-\lambda_\infty)u_\infty\|\\ &\le |\lambda_n|\|u_n-u_\infty\|+\|u_n-u_\infty\|\|u_\infty\|\\ &\le M(\|u_n-u_\infty\|+\|u_n-u_\infty\|)\longrightarrow 0\ .\end{aligned}$$

Finalement, ces propriétés peuvent se combiner un nombre fini de fois (par récurrence par exemple) pour obtenir les limites de combinaisons linéaires. □

La proposition suivante peut se démontrer par des estimations directes mais nous pouvons utiliser aussi les propriétés ci-dessus pour aller plus vite.

Proposition 3.47

Dans $\mathbb{R}^d$ muni d'une des normes $\|\cdot\|_p$, avec $p\in[1,+\infty]$, la convergence d'une suite est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée.

Démonstration : Nous avons déjà vu ce résultat pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, cf l'exemple sous la définition 3.29. Soit $p\in[1,+\infty[$. On peut décomposer chaque x_n sur la base canonique

$$x_n=x_n^1.(1,0,\ldots,0)+x_n^2.(0,1,\ldots,0)+\ldots+x_n^d(0,0,\ldots,1)\ .$$

La proposition précédente nous montre que si, pour tout i, la suite $(x_n^i)_n$ converge, alors la suite x_n converge aussi comme combinaison linéaire de suites convergentes. Si maintenant la suite (x_n) converge vers une limite ℓ, on a

$$\forall i \in [\![1,d]\!] \ , \ \ |x_n^i - \ell^i| \leq \Big(\sum_{j=1}^{d} |x_n^j - \ell^j|^p\Big)^{1/p} = \|x_n - \ell\|_p \to 0 \ .$$

Ceci montre que chaque coordonnée $(x_n^i)_n$ converge vers ℓ^i. □

On généralise facilement les définitions suivantes des suites réelles aux suites générales.

Définition 3.48

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$. Une fonction monotone $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est appelée une extraction et la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une **suite extraite** ou une **sous-suite** de (u_n).
Un point $x \in E$ est appelé **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) s'il est limite d'une sous-suite de (u_n).

Par des constructions astucieuses, on peut montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence peut être n'importe quoi, du moment qu'il s'agit d'un fermé. Cette contrainte vient du résultat suivant.

Proposition 3.49

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (u_n) est

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq N} \{u_n\}} \ .$$

C'est donc un fermé de E.

Démonstration : Une fois l'expression montrée, on aura que l'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé comme intersections de fermés.
Si ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n), il existe une sous-suite $(u_\varphi(n))$ qui converge vers ℓ. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $(u_\varphi(n))_{n\geq N}$ est une suite d'éléments de $\bigcup_{n\geq N}\{u_n\}$ qui converge vers ℓ qui est donc dans $\overline{\bigcup_{n\geq N}\{u_n\}}$. Comme cela est vrai pour tout n, ℓ est bien dans $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq N}\{u_n\}}$.
Soit ℓ un point de $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n\geq N}\{u_n\}}$. On construit l'extraction suivante. On pose $\varphi(0) = 0$. Comme $\ell \in \overline{\bigcup_{n\geq 1}\{u_n\}}$, la boule $B(\ell,1)$ rencontre $\bigcup_{n\geq 1}\{u_n\}$ et il existe un rang $n_1 =: \varphi(1)$ tel que $\|u_{n_1} - \ell\| \leq 1$. On repart de ce nouveau rang n_1 : comme $\ell \in \overline{\bigcup_{n\geq n_1+1}\{u_n\}}$, la boule $B(\ell,1/2)$ rencontre $\bigcup_{n>n_1}\{u_n\}$ et il existe un rang $n_2 =: \varphi(2) > n_1$ tel que $\|u_{n_2} - \ell\| \leq 1/2$. Puis de nouveau, comme $\ell \in \overline{\bigcup_{n\geq n_2+1}\{u_n\}}$, la boule $B(\ell,1/3)$ rencontre $\bigcup_{n>n_2}\{u_n\}$ et il existe un rang $n_3 =: \varphi(3) > n_2$ tel que $\|u_{n_3} - \ell\| \leq 1/3\ldots$ On construit ainsi une suite

extraire $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers ℓ. Donc ℓ est bien une valeur d'adhérence. $\square$

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}$, la suite $u_n = (-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence ± 1. Une démonstration rapide utilise le résultat précédent puisque $\bigcup_{n\geq N}\{u_n\}$ vaut toujours $\{-1,1\}$ qui est un fermé comme union de deux singletons.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la suite $x_n = ((-1)^n,(-1)^n)$ a pour valeurs d'adhérence $\{(1,1),(-1,-1)\}$, alors que la suite $x_n = ((-1)^n,(-1)^{n+1})$ a pour valeurs d'adhérence $\{(1,-1),(-1,1)\}$.
- Soit (q_n) une énumération des rationnels d'un intervalle $[a,b]$ (resp. de $\mathbb{R}$). Cette suite existe puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable comme toutes ses sous-parties. On peut montrer que les valeurs d'adhérence de (q_n) sont tout l'intervalle $[a,b]$ (resp. tout $\mathbb{R}$). Comme le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrables, on peut aussi énumérer les rationnels du carré $[0,1]^2$ et obtenir une suite dans les valeurs d'adhérence forme tout le carré.

Nous verrons dans un chapitre suivant la notion de « compacité » qui généralisera le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf théorème 2.25). Mais nous allons voir déjà une première généralisation dans le cas particulier de $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme usuelle.

Théorème 3.50 (Bolzano-Weierstrass pour les normes p)

Dans $\mathbb{R}^d$ muni d'une des normes p ($p \in [1,+\infty]$), toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration : Soit (x_n) une suite bornée : il existe M tel que $\|x_n\|_p \leq M$ pour tout n. On décompose x_n sur ses coordonnées : $x_n = (x_n^1,\ldots,x_n^d)$. Le caractère explicite des normes p nous montre que chaque suite de composantes (x_n^i) de (x_n) est aussi bornée par M dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$ (cf corollaire 2.26), on peut extraire une sous-suite $(x^1_{\varphi_1(n)})$ de la première coordonnées qui converge vers $x^1_* \in \mathbb{R}$. On regarde maintenant la suite $(x^2_{\varphi_1(n)})$ qui est la suite des deuxièmes composantes des termes qu'on a gardés. C'est toujours une suite réelle bornée, donc on peut en extraire une sous-suite $(x^2_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ qui converge vers $x^2_* \in \mathbb{R}$. Notons que la sous-suite $(x^1_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ étant une sous-suite de $(x^1_{\varphi_1(n)})$ converge toujours vers x^1_*. On continue ainsi de suite : de la suite $(x^3_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})$ on peut extraire une sous-suite $(x^3_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)})$ convergente etc. À chaque étape, on retire de nouveaux termes de la suite pour permettre à la composante i de converger. Comme on n'a qu'un nombre fini de composantes, il reste encore une infinité de termes après les d extractions et pour chaque i, la suite $(x^i_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_d(n)})$ converge vers un réel (x^i_*). Nous avons déjà remarqué que la convergence dans $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme p est équivalente à la convergence composante par composante. Donc la suite extraite $(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_d(n)})$ converge vers $x_* = (x^1_*,\ldots,x^d_*)$ dans $\mathbb{R}^d$. $\square$

4 Équivalence de normes

Nous avons vu plusieurs exemples de normes. Elles mesurent des distances différentes, mais on peut se poser la question de savoir si elles induisent des topologies différentes ou non, c'est-à-dire si la notion d'ouvert ou de suite convergente sera différente ou non selon la norme. Nous avons vu plus haut que la notion de convergence dans $\mathbb{R}^d$ ne dépend pas du choix de la norme p et donc toutes les normes p de $\mathbb{R}^d$ induisent la même notion de fermés et donc d'ouverts. On aimerait généraliser ce type de comparaison entre normes.

Définition 3.51

Soit E un espace vectoriel et soient $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\sharp$ deux normes sur E. On dit que $\|\cdot\|_*$ **domine** $\|\cdot\|_\sharp$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall x \in E \ , \ \ \|x\|_\sharp \ \leq \ M\|x\|_* \ .$$

On dit que les normes $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\sharp$ sont **équivalentes** sur E s'il existe des constantes m et M strictement positives telles que

$$\forall x \in E \ , \ \ m\|x\|_* \ \leq \ \|x\|_\sharp \ \leq \ M\|x\|_* \ .$$

Exemples :

- Sur $\mathbb{R}^d$, les normes 1 et ∞ sont équivalentes. En effet, comme le maximum des $|x_i|$ apparaît au moins une fois dans la norme, on a

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \geq \max_{i\in[\![1,d]\!]} |x_i| = \|x\|_\infty \ .$$

  Et en majorant chaque $|x_i|$ par leur maximum, on obtient

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{d} \|x\|_\infty = d\|x\|_\infty \ .$$

- Les normes 1 et ∞ ne sont pas équivalentes sur l'espaces de fonctions continues $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. En effet, on considère la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n$. On a

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |x|^n = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 |x^n|\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \ .$$

  S'il existait une constante M telle que $\|f_n\|_\infty \leq M\|f_n\|_1$, le fait que $\|f_n\|_1 \to 0$ impliquerait que $\|f_n\|_\infty \to 0$, ce qui n'est pas le cas.

  Par contre, la norme ∞ domine la norme 1 car pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, le calcul similaire au cas $\mathbb{R}^d$ donne

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |x^n|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}x = \|f\|_\infty \int_0^1 \mathrm{d}x = \|f\|_\infty \ .$$

Il est utile d'avoir une vision géométrique de la domination d'une norme... mais attention au sens de l'inclusion ! Comme on utilise plusieurs normes sur le même espace vectoriel, il est important de bien distinguer avec quelle norme on mesure une distance, on définit une boule etc. Nous utiliserons de façon naturelle une notation mettant la norme en indice.

Proposition 3.52

Soit E un espace vectoriel et soient $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\sharp$ deux normes sur E. La domination

$$\forall x \in E \ , \quad \|x\|_\sharp \ \leq \ M\|x\|_* \ .$$

est équivalente à l'inclusion des boules

$$B_{\|\cdot\|_*}(0{,}1) \subset B_{\|\cdot\|_\sharp}(0{,}M)$$

Démonstration : Supposons que $\|x\|_\sharp \leq M\|x\|_*$ pour tout x. Soit $x \in B_{\|\cdot\|_*}(0{,}1)$, on a par définition $\|x\|_* < 1$. La domination implique que $\|x\|_\sharp < M$ et donc que $x \in B_{\|\cdot\|_\sharp}(0{,}M)$.
Supposons maintenant que $B_{\|\cdot\|_*}(0{,}1) \subset B_{\|\cdot\|_\sharp}(0{,}M)$. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, l'estimation est trivial. Sinon, on normalise $\|x\|$ en posant $\tilde{x}_n = \frac{1-2^n}{\|x\|_*}x$. On a alors

$$\|\tilde{x}_n\|_* = \left\|\frac{1-2^n}{\|x\|_*}x\right\|_* = \frac{1-2^n}{\|x\|_*}\|x\|_* = 1 - 2^{-n} \ .$$

Notons qu'on a pris exactement ce qu'il fallait pour avoir $\tilde{x}_n$ dans la boule ouverte $B_{\|\cdot\|_*}(0{,}1)$ (en général, on normalise en un vecteur de taille 1, mais on a ici des boules ouvertes donc ce n'est pas exactement convenable). Par hypothèse d'inclusion, $\tilde{x}_n$ appartient aussi à $B_{\|\cdot\|_\sharp}(0{,}M)$. Donc pour tout n on a $\|\tilde{x}_n\|_\sharp < M$ et donc $\frac{1-2^n}{\|x\|_*}\|x\|_\sharp < M$. En faisant tendre n vers l'infini et en multipliant par $\|x\|_*$, on trouve bien $\|x\|_\sharp \leq M\|x\|_*$. $\square$

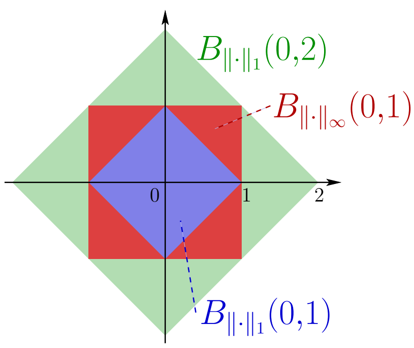
Exemple :

On se place dans le plan. On vérifie facilement géométriquement les inclusions

$$B_{\|\cdot\|_1}(0{,}1) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(0{,}1)$$

et

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(0{,}1) \subset B_{\|\cdot\|_1}(0{,}2) \ .$$



La proposition 52 montre donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ , \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty \ .$$

On retrouve géométriquement ce que l'on avait obtenu par le calcul ci-dessus.

L'intérêt central de cette notion d'équivalence de normes, c'est de voir quand deux normes induisent la même topologie.

Proposition 3.53

Soit E un espace vectoriel et soient $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\sharp$ deux normes sur E.
Les propriétés suivantes sont toutes équivalentes :

(i) les normes $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\sharp$ sont équivalentes,

(ii) un ensemble $\mathcal{O} \subset E$ est ouvert pour la topologie de $\|\cdot\|_*$ si et seulement s'il est ouvert pour la topologie de $\|\cdot\|_\sharp$,

(iii) un ensemble $\mathcal{F} \subset E$ est fermé pour la topologie de $\|\cdot\|_*$ si et seulement s'il est fermé pour la topologie de $\|\cdot\|_\sharp$,

(iv) un ensemble $\mathcal{B} \subset E$ est borné pour la topologie de $\|\cdot\|_*$ si et seulement s'il est borné pour la topologie de $\|\cdot\|_\sharp$,

(v) une suite $(x_n) \subset E$ converge vers $x \in E$ pour la topologie de $\|\cdot\|_*$ si et seulement si elle une suite $(x_n) \subset E$ converge vers x pour la topologie de $\|\cdot\|_\sharp$.

Démonstration : Il est clair que (ii) et (iii) sont équivalentes en passant au complémentaire $\mathcal{F} = \mathcal{O}^C$.
Supposons que (v) soit vraie. On utilise la caractérisation séquentielle des fermés. Si $\mathcal{F}$ est un fermé pour la norme $\|\cdot\|_*$ et qu'on regarde une suite $(x_n) \subset \mathcal{F}$ convergeant vers $x \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\sharp$ alors (v) implique que la suite converge aussi pour la norme $\|\cdot\|_*$ et par fermeture que $x \in \mathcal{F}$. Ceci montre qu'un fermé pour $\|\cdot\|_*$ est aussi un fermé pour $\|\cdot\|_\sharp$. Par symétrie, l'autre implication est aussi vraie et donc (v) implique (iii).
Supposons que (ii) soit vraie. On utilise la caractérisation de la convergence par les ouverts. Supposons que (x_n) tend vers x pour $\|\cdot\|_*$ et que x est dans $\mathcal{O}$ ouvert pour $\|\cdot\|_\sharp$. Alors $\mathcal{O}$ est encore un ouvert pour $\|\cdot\|_*$ et donc x_n doit appartenir à $\mathcal{O}$ pour n assez grand. Ceci montre que (x_n) converge aussi pour $\|\cdot\|_\sharp$. Par symétrie, l'autre implication est aussi vraie et donc (ii) implique (v).
Au total nous avons pour le moment que (ii), (iii) et (v) sont équivalentes.
Si (i) est vraie et que (x_n) tend vers $x \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_*$, alors par définition $\|x_n - x\|_* \to 0$. Mais comme $\|\cdot\|_*$ domine $\|\cdot\|_\sharp$, on doit avoir par théorème des gendarmes $\|x_n - x\|_\sharp \to 0$. Donc (x_n) tend aussi vers $x \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\sharp$. Encore une fois, l'autre cas est symétrique et donc (i) implique (v).
Si (ii) est vraie alors la boule ouverte $B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$ doit être un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\sharp$. Donc il existe $r > 0$ tel que la boule $B_{\|\cdot\|_\sharp}(0,r)$ soit incluse dans $B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$. Par propriété d'homothétie des normes (cf Proposition 3.6), on a alors $B_{\|\cdot\|_\sharp}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_*}(0,1/r)$. La proposition 3.52 conclut que $\|\cdot\|_\sharp$ domine $\|\cdot\|_*$. L'autre domination se montre symétriquement et donc (ii) implique (i).

Il ne reste plus qu'à s'occuper de (iv). Si les deux normes sont équivalentes, il est clair qu'un ensemble borné pour l'un doit être borné pour l'autre par simple inégalité. Supposons que (iv) soit vraie. La boule $B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$ qui est bornée pour $\|\cdot\|_*$ doit aussi être bornée pour $\|\cdot\|_\sharp$. Donc il existe M assez grand tel que $B_{\|\cdot\|_*}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_\sharp}(0,M)$ et la proposition 52 conclut que $\|\cdot\|_*$ domine $\|\cdot\|_\sharp$. Comme toujours, on obtient l'autre implication par symétrie et on a bien que (iv) implique (i). □

Le résultat principal de cette partie est l'équivalence des normes en dimension finie. Ainsi, tous les résultats que nous avons déjà obtenus pour les normes p sur $\mathbb{R}^d$ seront généralisés.

Théorème 3.54

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration : Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque. Il suffit de montrer qu'elle est équivalente à la norme infini car la relation d'équivalence des normes est transitive. Soit $(e_1,\ldots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ décomposé en $x = x_1e_1 + \ldots x_de_d$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\|x\| = \|x_1e_1 + \ldots x_de_d\| \leq |x_1|\|e_1\| + \ldots |x_d|\|e_d\| \leq \max_i |x_i| \max_j \|e_j\| \ .$$

Si on pose $M = \max_j \|e_j\|$, on vient de montrer que $\|x\| \leq M\|x\|_\infty$.
Pour montrer l'autre domination, nous raisonnons par l'absurde. S'il n'existe pas de constante $M' > 0$ telle que $\|x\|_\infty \leq M'\|x\|$, c'est que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\|_\infty > n\|x_n\|$. Nous normalisons la suite en posant $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|_\infty$. On a alors

$$\|\tilde{x}_n\|_\infty = \left\|\frac{1}{\|x_n\|_\infty}x_n\right\|_\infty = \frac{1}{\|x_n\|_\infty}\|x_n\|_\infty = 1$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\|\tilde{x}_n\| = \frac{1}{\|x_n\|_\infty}\|x_n\| < \frac{1}{n} \ .$$

Donc $\tilde{x}_n$ tend vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$. Concernant la norme infini, la suite est contenue dans la sphère unité. D'après le théorème 3.50, on peut en extraire une sous-suite $(\tilde{x}_{\varphi(n)})$ convergeant vers x_*. Par la proposition 3.43, la normalisation $\|\tilde{x}_n\|_\infty = 1$ implique que $\|x_*\|_\infty = 1$. Finalement, nous utilisons la première domination pour écrire

$$\|x_* - \tilde{x}_{\varphi(n)}\| \leq M\|x_* - \tilde{x}_{\varphi(n)}\|_\infty \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \ .$$

Donc $(\tilde{x}_{\varphi(n)})$ converge vers x_* pour la norme $\|\cdot\|$ et par unicité de la limite, comme on avait déjà montrer la convergence vers 0, on a forcément $x_* = 0$. Or ceci contredit le fait que $\|x_*\|_\infty = 1$. On vient donc d'obtenir l'existence d'un entier N tel que $\|x\|_\infty \leq N\|x\|$ ce qui conclut l'équivalence des normes. □

Ce théorème permet de généraliser à tout espace de dimension finie ce que nous avons vu pour les normes p.

Exemple :

En fin de partie 2, nous avons démontré que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ pour la norme 1. Comme la densité peut se caractériser en terme de convergence de suites, la proposition 3.53 et le théorème 3.54 nous donne directement que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$ pour toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$, en particulier les autres normes p avec $p \in [1, +\infty]$.

En résumé :

Dans un espace vectoriel E de dimension finie :

- Toutes les normes sont équivalentes et ce n'est pas utile de préciser dans quelle norme on considère une propriété topologique.
- La convergence des suites est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée dans une base.

Dans un espace vectoriel E de dimension infinie :

- Il existe des normes non équivalentes. Il faut toujours bien préciser avec quelle norme on travaille.

5 Compléments

5.1 Espaces de matrices

Une matrice A de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est la donnée de d^2 nombres réels $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$. L'espace vectoriel des matrices est donc $\mathbb{R}^{d^2}$, sur lequel on a ajouté une structure supplémentaire de multiplication. On peut munir $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de n'importe quelle norme car toutes sont équivalentes (dimension finie). On peut utiliser par exemple la norme infinie

$$\|A\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq d} |a_{i,j}| \ .$$

Il peut être intéressant de voir la relation entre cette structure de norme et la multiplication.

Proposition 3.55

Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors $\|AB\|_\infty \leq d\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Démonstration : Il suffit de voir que les coefficients de AB sont de la forme $c_{ij} = \sum_{k=1}^{d} a_{ik} b_{kj}$. Une majoration brutale donne alors

$$\begin{aligned}\|AB\|_\infty \le \sup_{ij} \Big| \sum_{k=1}^{d} a_{ik} b_{kj} \Big| &\le \sup_{ij} \sum_{k=1}^{d} |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \\ &\le \sup_{ij} \sum_{k=1}^{d} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = d \|A\|_\infty \|B\|_\infty \ .\end{aligned}$$

□

Dans la proposition précédente, le facteur d est un peu gênant et peu esthétique. On aurait aimé avoir une *norme d'algèbre* pour laquelle la norme du produit est majorée par le produit des normes. Cela est possible avec une norme plus complexe que nous verrons au prochain chapitre. Une fois que l'on a muni notre espace d'une topologie, on peut montrer des résultats qui sont intéressants.

Proposition 3.56

L'ensemble des matrices inversibles est dense parmi les matrices.

Démonstration : Un calcul direct par développement montre que si A est une matrice, la fonction $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ est un polynôme non nul en lambda (il s'agit du polynôme caractéristique qui commence par $(-\lambda)^d + \ldots$). Par ailleurs, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
Soit A une matrice non inversible. Le polynôme χ_A a au plus d racines. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in]0,\varepsilon[$ qui n'est pas une racine de χ_A. La matrice $B = A - \lambda Id$ est alors une matrice inversible et

$$\|B - A\|_\infty = \|\lambda Id\|_\infty = |\lambda| < \varepsilon \ .$$

Donc B est une matrice inversible dans la boule $B(A,\varepsilon)$.
Ceci montre que toute boule contient au moins une matrice inversible et donc que l'ensemble des matrices inversibles est dense. □

5.2 Les ouverts-fermés d'un espace vectoriel

Théorème 3.57

Dans un espace vectoriel normé E, les seuls sous-ensembles qui sont à la fois fermés et ouverts dans E sont l'ensemble vide et E tout entier.

Démonstration : Soit U un ouvert-fermé de E qui n'est pas $\emptyset$. Il existe donc un point $x \in U$. Soit $y \in E$ un autre point. On regarde le segment $[x,y] = \{z_\theta = \theta x + (1-\theta) y, \theta \in [0,1]\}$. Soit $A \subset [0,1]$ l'ensemble des paramètres θ

tels que $z_{\theta'} \in U$ pour tout $\theta' \in [0,\theta]$ (on regarde les segments $[x,z_\theta] \subset [x,y] \cap U$). L'ensemble A est non vide car $0 \in A$ et il est majoré par 1. Il admet donc une borne supérieure $\theta = \sup A$. On pose $u_n = z_{(1-2^{-n})\theta}$. Comme

$$\|u_n - z_\theta\| = \| -2^{-n}\theta x + 2^{-n}\theta y\| = 2^{-n}\theta\|y - x\| \ ,$$

la suite u_n tend vers z_θ tout en étant dans U par construction. Comme U est fermé, on a $z_\theta \in U$. Mais comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(z_\theta,r) \subset U$. Si $\theta < 1$, on aurait $z_{\theta'} \in B(z_\theta,r) \subset U$ pour tout $\theta' > \theta$ assez proche de θ. Cela contredirait la définition de z_θ. Donc $\theta = 1$ et $z_\theta = y \in U$. On vient de montrer que tout $y \in E$ est dans U, donc $U = E$. $\square$

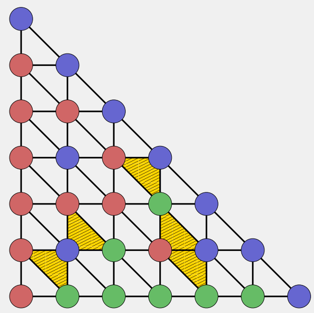
5.3 Utilisation d'un lemme « à la Sperner »

Le lemme de Sperner est un lemme sur les coloriages d'une triangulation. Son énoncé est simple et il existe plusieurs démonstrations. Mais ce résultat est bien plus profond qu'il en a l'air car il dépend en fait de la topologie du triangle. On verra ainsi certaines de ces conséquences dont l'énoncé dépend vraiment de la forme du domaine que l'on considère.

Nous n'allons pas montrer le lemme de Sperner dans toute sa généralité mais uniquement une version simplifiée.

Proposition 3.58

On considère un triangle rectangle isocèle découpé en petits triangles rectangles isocèles comme dans la figure ci-contre. On suppose que chaque sommet du découpage est colorié comme suit :



- sur le bord ouest, les sommets sont rouge
- sur le bord sud, les sommets sont verts
- sur le bord nord-est, les sommets sont bleus
- les sommets du grand triangle ont au choix une des deux couleurs des bords associés (rouge ou bleu pour le sommet nord etc.).
- les sommets à l'intérieur du triangle ont n'importe quelle des trois couleurs rouge, vert ou bleu.

Alors il existe au moins un petit triangle tricolore dont les trois sommets sont de couleurs différentes.

Démonstration : Comptons le nombre d'arêtes de petits triangles qui sont vert-rouge. Pour chaque triangle bicolore, il y en a 0 ou 2 alors qu'il y en a exactement une pour un triangle tricolore. Si on dénombre ainsi les arêtes, on note que les arêtes internes sont comptées deux fois car elles sont dans deux petits triangles alors que les arêtes externes sont comptées une seule fois. On obtient l'équation :

2×nombre de triangles vert-vert-rouge
+ 2×nombre de triangles vert-rouge-rouge
+ nombre de triangles tricolores
=
2×nombre d'arêtes vert-rouge internes
+ nombre d'arêtes vert-rouge externes

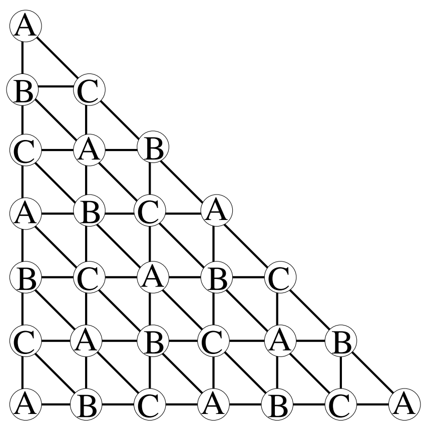
Or il y a exactement une arête vert-rouge externe dans le coin sud-ouest. Donc le nombre de petits triangles tricolores est impair. □

Application au partage équitable d'une colocation :
Trois colocataires doivent se répartir les 3 chambres d'un appartement. Celles-ci ne sont pas du tout semblables et chaque colocataire peut avoir des préférences différentes. Une façon de rendre le partage équitable est que le loyer soit partagé de façon à compenser les écarts de qualité des chambres. On note A, B et C les trois colocataires et on fait correspondre à chaque chambre une couleur rouge, vert ou bleu. Une répartition du loyer est la donnée de deux pourcentages : x, qui est le pourcentage de loyer attribué à la chambre rouge, et y qui est le pourcentage de loyer attribué à la chambre verte. Évidemment, la chambre bleue aura le loyer $100-(x+y)$. Une répartition des loyers par chambre est donc un point du triangle rectangle isocèle

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 100\} \ .$$

On suppose que le choix des colocataires suit les règles :

- Un colocataire préfère toujours une chambre gratuite à une payante,
- Si un colocataire préfère une chambre pour toutes les répartitions de loyer (x_n,y_n) et que (x_n,y_n) tend vers (x_*,y_*), alors le colocataire préfère toujours la même chambre pour la répartition (x_*,y_*) (il peut préférer plusieurs chambres de manière égale).



On découpe le triangle représentant la répartition des loyers comme ci-contre : à chaque sommet on demande au colocataire marqué sur le sommet une chambre qu'il préfère pour cette répartition de loyers. On vérifie que ce coloriage respecte la règle de Sperner. Par exemple, si $x=0$, alors la chambre rouge est gratuite et si $y \neq 0$ et $y \neq 100$ c'est la seule gratuite et donc la chambre rouge sera toujours choisie. La proposition 5.58 montre qu'il existe un triangle tricolore et on note (x_1,y_1) un de ses sommets. On remarque que le fait que le triangle est tricolore correspond à ce que chaque colocataire a choisi une chambre différente. Le souci est que ce n'est pas pour la même répartition des loyers (chaque sommet correspondant à une répartition différente). On recommence alors avec un découpage en triangles plus petits et on obtient un triangle tricolore dont un sommet est (x_2,y_2) etc. On a ainsi une suite de répartition des loyers pour des triangles tricolores de plus en plus petits.

Nous allons extraire de cette suite de sommets une sous-suite adéquate. Tout d'abord, par le théorème 3.50, nous pouvons supposer, quitte à extraire, que la suite (x_n,y_n) a une limite (x_*,y_*). Ensuite, chaque (x_n,y_n) correspond à un triangle tricolore et une certaine répartition des chambres. Comme il n'y a que 6 répartitions possibles et une infinité de (x_n,y_n), on peut aussi extraire une sous-suite qui correspondra toujours à la même répartition des chambres. Puis on utilise la règle de continuité des choix pour montrer que cette répartition des chambres, avec la répartition des loyers (x_*,y_*), donne une répartition de la colocation telle qu'aucun des colocataires n'est jaloux de la chambre du voisin.