Contrôle continu n° 2

Mardi 10 novembre 2020
14h-17h

Exercice 1 : Question de cours

Soit D un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction $K-$lipschitzienne.

1. Montrer que f est uniformément continue sur D.
2. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq a|x| + b$. En déduire que si D est borné, alors f est bornée sur D.

Exercice 2 : Adhérence et union

1. Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset B$. Montrer que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Soit $(A_n)_{n=1,\ldots,N}$ une famille finie de N ensembles de $\mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que $\overline{\bigcup_{n=1,\ldots,N} A_n} = \bigcup_{n=1,\ldots,N} \overline{A_n}$.
4. Montrer par un contre-exemple que si on considère une famille infinie $(A_n)_{n\geq 1}$, alors $\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ et $\bigcup_{n\geq 1} \overline{A_n}$ peuvent être différents.

Exercice 3 : Image réciproque

On considère l'ensemble $A = \{\, x \in \mathbb{R} \,,\ e^x > \cos x \,\}$.

1. En écrivant A comme image réciproque d'un ensemble par une fonction, montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. En considérant la suite $x_n = 1/n$, montrer que A n'est pas un fermé.

Exercice 4 : Ensemble des valeurs d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On considère l'ensemble de ses valeurs

$$U \;=\; \{\, u_n \,,\; n \in \mathbb{N}\,\} \;\subset\; \mathbb{R}\,.$$

1. Montrer que U n'est jamais un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. On suppose que (u_n) converge vers $0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $\overline{U} = U \cup \{0\}$.
3. Donner un exemple de suite telle que U est un fermé de $\mathbb{R}$ et un exemple où U n'est pas un fermé.
4. Montrer que $\sup_n u_n$ appartient toujours à $\overline{U}$.
5. Montrer que si U n'est pas fermé, alors (u_n) a au moins une valeur d'adhérence. Que peut-on dire sur U si u_n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 : Fonctions périodiques

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite T-*périodique* pour un certain $T > 0$ si

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad f(x+T) = f(x)\ .$$

1. Montrer que si f est $T-$périodique, elle est aussi $kT-$périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que $f(x+kT) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $T > 0$ et f une fonction $T-$périodique qui admet en $+\infty$ une limite finie $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que f est constante égale à ℓ.
3. Soit $T > 0$ et soit f une fonction continue qui est $T-$périodique. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.
4. Montrer qu'une fonction continue $T-$périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que si f est continue et $1/q-$périodique pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ est $1/q-$périodique pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

Barème indicatif : 2/4/2/6/6