Contrôle continu n°2 – correction

Questions de cours :

1. Un réel ℓ est valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels (x_n) s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers ℓ.
2. Un point $x \in \mathbb{R}$ est dans l'adhérence de $E \subset \mathbb{R}$ si et seulement si c'est une limite d'une suite $(x_n) \subset E$ ou de façon équivalente si pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap E \neq \emptyset$.
3. Par définition, toute valeur d'adhérence d'une suite (x_n) est adhérent à l'ensemble des valeurs $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ et on note $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs de la suite.

4. Pour n impair, $a_n \leq 0$ et pour n pair, $a_n \geq 1$. Donc toute sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ convergente doit être composée d'indices de même parité pour n assez grand pour que le critère de Cauchy soit vérifié. Or $a_{2n} \to 1$ et $a_{2n+1} \to -1$ et toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite. Donc les seuls valeurs d'adhérence sont ± 1.
5. Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de A. Pour chaque k, il existe $n(k)$ tel que $x_k = a_{n(k)}$. Si la suite $n(k)$ tend vers $+\infty$, les arguments de la question précédente montre que x_k doit tendre vers ± 1. Si $n(k)$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut en extraire une sous-suite majorée et donc une sous-suite stationnaire $n(\varphi(k)) \equiv N \in \mathbb{N}$ puisque les indices sont des entiers positifs. La limite de (x_k) ne peut donc être qu'une valeur a_N. Ces valeurs d'adhérence sont évidemment possibles donc $\mathrm{Ad}(A) = A \cup \{\pm 1\}$.
6. Nous venons de voir que $\mathrm{Ad}(A)$ contient A, qui est disjoint de l'ensemble $\{\pm 1\}$ des valeurs d'adhérence la suite (a_n).

Exercice 1 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A\ ,\quad \forall b \in B\ ,\quad a \leq b\ . \tag{1}$$

1. D'après (1), un élément b de B majore tout a de A et est donc un majorant de A. Comme A est non vide et majoré, $\sup A$ existe. De même, $\inf B$ existe par les arguments symétriques.
2. Comme $\inf B$ est le plus grand minorant de B, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$ tel que $b \leq \inf B + \varepsilon$. Comme b est un majorant de A, on a $\sup A \leq b \leq \inf B + \varepsilon$.

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, quand ε tend vers 0, on obtient $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 2 : On a

$$\begin{aligned} E &= \left\{x \in \mathbb{R} \ , \ \cos x \ > \ \left(e^x + \frac{1}{2}\right)\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \ , \ \cos x \ < \ e^x\right\} \\ &= f^{-1}(]-\infty, 0[\cup]1/2, +\infty[) \end{aligned}$$

où $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos x - e^x$ est une fonction continue. Comme $]-\infty, 0[\cup]1/2, +\infty[$ est ouvert comme union d'intervalles ouverts, E est un ouvert de $\mathbb{R}$. Il n'est pas fermé car $x_n = 1/n$ est dans E puisque $\cos(1/n) < 1 < e^{1/n}$ mais $x_n \to 0$ et $\cos 0 = e^0$.

Exercice 3 : On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et $f(x + y) = f(x) \times f(y)$. On va raisonner par analyse-synthèse en supposant qu'on dispose d'une fonction f vérifiant ces propriétés.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h_n \to 0$. On a $f(x + h_n) = f(x)f(h_n)$. Comme f est continue en 0 et $f(0) = 1$, on a $f(h_n) \to 1$ et $f(x + h_n) \to f(x)$. Donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(x/2)^2$ donc $f(x) \geq 0$. Par ailleurs $1 = f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x)$ donc $f(x) \neq 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons par récurrence que $f(nx) = f(x)^n$ pour tout n. C'est déjà trivial pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que la propriété est vraie pour tout $n \leq N$. On a alors
$$f((N + 1)x) = f(Nx + x) = f(Nx)f(x) = f(x)^N f(x) = f(x)^{N+1}$$
ce qui conclut la preuve par récurrence.
4. Comme $f(1) > 0$, on peut poser $\lambda = \ln(f(1))$, c'est-à-dire $f(1) = e^\lambda$. On sait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(1)^n = e^{\lambda n}$. Par ailleurs, on a aussi que $f(1) = f(n/n) = f(1/n)^n$. Donc $f(1/n) = e^{\lambda/n}$. Pour tout $r = p/q \geq 0$, on a donc que $f(r) = f(p/q) = f(1/q)^p = e^{\lambda p/q}$. D'autre part, on a déjà remarqué que $1 = f(x)f(-x)$ et donc que $f(-x) = 1/f(x)$, ce qui étend l'expression plus haut aux rationnels négatifs.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels (r_n) qui tend vers x (par exemple en prenant de plus en plus de décimales de l'écriture de x). On a $g(r_n) = h(r_n)$ pour tout n. Par continuité, on peut passer à la limite et on obtient $g(x) = h(x)$. Donc $g \equiv h$ sur tout $\mathbb{R}$.
6. La fonction f et la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur les rationnels et donc $f(x) = e^{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, les fonctions exponentielles sont bien solution du problème et forment donc l'ensemble de toutes les solutions.

Problème : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est « circulaire » si elle admet des limites en $\pm\infty$ et si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)\ .$$

On notera $\lim_{\pm\infty} f$ cette limite commune.

1. Soit f une fonction circulaire continue. Si f est majorée par $\lim_{\pm\infty} f$, alors $\sup_{\mathbb{R}} f = \lim_{\pm\infty} f$ car f tend vers cette valeur en l'infini. Supposons que $\lim_{\pm\infty} f$ ne majore pas f : il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\tilde{x}) > \lim_{\pm\infty} f$. Par propriété de la limite, il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $x < -M$ et tout $x > M$, on a $f(x) < f(\tilde{x})$. En particulier, notons que $\tilde{x}$ doit être dans $[-M, M]$. Sur l'intervalle compact $[-M, M]$, f est continue et donc majorée et atteint son max en un point x_0. Comme $f(x_0) \geq f(\tilde{x}) > \sup_{]-\infty,-M[\cup]M,+\infty[} f$, on a que $f(x_0)$ est le max de f sur tout $\mathbb{R}$.
2. Soit f continue et circulaire et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x < -M$ et tout $x > M$, on a $|f(x) - \lim_{\pm\infty} f| < \varepsilon/2$. Donc pour tout $x, y \notin [-M, M]$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En outre, f est continue sur $[-M-1, M+1]$ et donc uniformément continue par le théorème de Heine : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-M-1, M+1]$ avec $|x-y| \leq \alpha$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit $\delta = \min(\alpha, 1/2)$. Si x et y vérifient $|x-y| \leq \delta$ alors soit x et y sont tous les deux hors de $[-M, M]$, soit ils sont tous les deux dans $[-M-1, M+1]$ à distance plus petite que α. On a donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dans tous les cas. Donc f est uniformément continue.
3. (a) Soient f et g deux fonctions circulaires. Supposons que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Comme f et g ont des limites en $\pm\infty$, en passant à la limite $x \to \pm\infty$ dans l'inégalité, on obtient $|\lim_{\pm\infty} f - \lim_{\pm\infty} g| \leq \varepsilon$.

   (b) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions circulaires qui convergent uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, pour tout $p, q \geq N$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_p(x) - f_q(x)| \leq 2\varepsilon$ et donc $|\lim_{\pm\infty} f_p - \lim_{\pm\infty} f_q| \leq 2\varepsilon$ d'après la question précédente. Donc $(\lim_{\pm\infty} f_n)_n$ est une suite de Cauchy et donc elle converge vers un réel ℓ.

   Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence, il existe n tel que $\sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ et aussi $|\lim_{\pm\infty} f_n - \ell| \leq \varepsilon/3$. La fonction f_n étant circulaire, il existe M tel que pour tout $x < -M$ et tout $x > M$, on a $|f_n(x) - \lim_{\pm\infty} f_n| < \varepsilon/3$. On obtient donc que pour tout $x < -M$ et tout $x > M$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ par inégalité triangulaire. Cela montre que f est aussi circulaire et $\lim_{\pm\infty} f = \ell$.
4. Soit f une fonction circulaire continue de limite $\lim_{\pm\infty} f$. Si f est constante, elle n'est pas injective. Si f n'est pas constante, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \lim_{\pm\infty} f$, disons $f(x_0) > \lim_{\pm\infty} f$ (l'autre cas est symétrique). Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) > \lim_{\pm\infty} f + \varepsilon$. Il existe x_- proche de $-\infty$ et x_+ proche de $+\infty$, tels que $f(x_\pm) < \lim_{\pm\infty} f + \varepsilon$. Quitte à les prendre plus proche de $\pm\infty$, on peut supposer que $x_- < x_0 < x_+$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\tilde{x}_- \in]x_-, x_0[$ et $\tilde{x}_+ \in]x_0, x_+[$ tels que $f(\tilde{x}_\pm) = \lim_{\pm\infty} f + \varepsilon$. Cela montre que f ne peut pas être injective.

   Si on suppose que f est circulaire mais pas forcément continue, elle peut être injective, voire bijective. Par exemple $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{\pm\infty} f = 0$.