Contrôle continu n° 1

Mardi 29 septembre 2020
16h10-17h40

Exercice 1 : On note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire $E(x) = \sup\{p \in \mathbb{Z}, p \leq x\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|x - 10^{-n}E(10^n x)\right| < 10^{-n}$.
2. En déduire que pour tous réels x et y avec $x < y$, il existe un nombre décimal d tel que $x < d < y$.

Exercice 2 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est aussi un ensemble non vide majoré et que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \ .$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que si f n'est pas majorée, alors $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. Montrer que si f est majorée, alors $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$, où $\ell = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence $a \in \mathbb{R}$ de (u_n).
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de réels. Montrer l'équivalence entre
   (i) Il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in E$.
   (ii) Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $u_{\varphi(n)} \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Indication pour (i)⇒(ii) : pour tout $N \in \mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq N$.
3. Montrer que si $u_n \in [0,1]$ pour une infinité d'indices n, alors il existe une valeur d'adhérence de (u_n) dans $[0,1]$.
4. Montrer que la réciproque est fausse en donnant un exemple de suite (u_n) ayant une valeur d'adhérence dans $[0,1]$ mais tel que (u_n) ne prend aucune valeur dans $[0,1]$.
5. Montrer que si (u_n) a une valeur d'adhérence dans $]0,1[$, alors il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in]0,1[$.
6. Montrer que la réciproque est fausse en donnant une suite entièrement incluse dans $]0,1[$ mais qui n'a aucune valeur d'adhérence dans $]0,1[$.

Barème indicatif : 3/3/6/8