
Contrôle continu n°1

Mercredi 25 septembre 2019 – 10h30-12h15

Questions de cours :

1. Donner la définition du développement décimal propre d'un nombre réel.
2. Dire si les nombres suivants sont rationnels ou décimaux (justifier la réponse) et, quand c'est le cas, les exprimer comme une fraction :

$$x = \sum_{k \geq 0} 10^{-k} \quad y = \sum_{k=0}^3 10^{-k} \quad z = \sum_{k \geq 0} 10^{-10^k} .$$

Exercice 1 : Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} et soit $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ son complémentaire. Montrer qu'on ne peut avoir A et A^c tous les deux majorés. Est-il possible qu'aucun des deux ne soit majoré ?

Exercice 2 : Soient A et B deux parties minorées non vides de \mathbb{R} . Montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On veut montrer l'équivalence entre « $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$ » et « (u_n) a au moins une valeur d'adhérence ».

1. On suppose que $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ bornée.
2. En déduire que si $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, alors il existe une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ qui converge vers un réel ℓ .
3. Conclure en démontrant l'équivalence énoncée au début de l'exercice.

Exercice 4 : Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est-à-dire que (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $|a_n - b_n| \rightarrow 0$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $a_N \leq a_n \leq b_n + \varepsilon \leq b_N + \varepsilon$.
2. En déduire que (a_n) est majorée et que (b_n) est minorée (on donnera des bornes les plus explicites possible). Sont-elles convergentes ? Que peut-on dire de leur limite ?
3. Montrer que $a_n \leq b_m$ pour tous les indices n et m .

Barème indicatif : 3/2/5/6/4