Contrôle continu n° 1

Correction

Exercice 1 : On note $E(x)$ la partie entière de x.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière, $E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ et en particulier $\left|10^n x - E(10^n x)\right| < 1$. On obtient donc que $\left|x - 10^{-n} E(10^n x)\right| < 10^{-n}$.
2. Prenons x et y tels que $x < y$. On pose $z = (x+y)/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $d_n = 10^{-n} E(10^n z)$ qui est un nombre décimal puisqu'il appartient à $10^{-n}\mathbb{Z}$. Pour n assez grand, on a $|z - x| = (y-x)/2 > 10^{-n}$ et alors $\left|z - d_n\right| < 10^{-n}$ implique que $d_n > z - 10^{-n} > x$. Comme par ailleurs $d_n \leq 10^{-n} 10^n z = z < y$, on obtient bien que le décimal d_n vérifie $x < d_n < y$.

Exercice 2 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$. Comme A est non vide, $A \cup B$ est forcément non vide aussi. Comme A et B sont majorés par $\sup A$ et $\sup B$, alors pour tout $x \in A \cup B$, on a

- soit $x \in A$ et $x \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$,
- soit $x \in B$ et $x \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Ceci montre que $A \cup B$ est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$, et donc, étant aussi non vide, qu'il admet une borne supérieure vérifiant $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Supposons sans perte de généralité que $\sup A \geq \sup B$ (le cas symétrique se traitant de la même façon). On a $\max(\sup A, \sup B) = \sup A$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\sup A - \varepsilon$ ne majore pas A, il existe $a \in A$ tel que $a > \sup A - \varepsilon$. Mais a appartient aussi à $A \cup B$ et donc $\sup A - \varepsilon$ ne majore pas $A \cup B$ non plus. Donc $\sup A = \max(\sup A, \sup B)$ est le plus petit majorant de $A \cup B$ et $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. On suppose que f n'est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > M$. Mais comme f est croissante, pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \geq f(x_0) > M$. Ceci dit exactement que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. On suppose maintenant que f est majorée. L'image $f(\mathbb{R})$ de f est donc majorée et évidemment non vide. Donc elle admet une borne supérieure $\ell = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\ell - \varepsilon$ ne majore pas $f(\mathbb{R})$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > \ell - \varepsilon$. Par croissance de f et par définition de ℓ, on a pour tout $x \geq x_0$, $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell$. Ceci montre que pour tout $x \geq x_0$, $|\ell - f(x)| \leq \varepsilon$ et donc que $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Une valeur d'adhérence de (u_n) est un réel a tel qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge vers a.
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de réels. S'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $u_{\varphi(n)} \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \in E$ pour tous les indices $n \in \varphi(\mathbb{N})$, ce qui fait une infinité d'indices. Donc (ii) implique (i).
   Supposons que (i) soit vrai. Il existe au moins un indice n_0 tel que u_{n_0} appartienne à E. On pose $\varphi(0) = n_0$. Imaginons construits des indices $\varphi(1) < \ldots < \varphi(k)$ tels que $u_{\varphi(i)}$ appartienne à E. Comme il y a une infinité d'indices n tels que $u_n \in E$, il existe forcément un indice n_{k+1} strictement plus grand que $\varphi(k)$ tel que $u_{n_{k+1}}$ appartienne à E. On pose alors $\varphi(k+1) = n_{k+1}$. On construit ainsi petit à petit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $u_{\varphi(n)} \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (i) implique (ii).
3. Supposons que $u_n \in [0,1]$ pour une infinité d'indices n, alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ incluse dans $[0,1]$ d'après la question précédente. Comme $(u_{\varphi(n)})$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ convergeant vers $a \in \mathbb{R}$. Comme $0 \leq u_{\varphi\circ\psi(n)} \leq 1$ pour tout n, le passage à la limite montre que $a \in [0,1]$. On a bien obtenu une valeur d'adhérence a de (u_n) dans $[0,1]$.
4. La réciproque est fausse puisque la suite définie par $u_n = 1+2^{-n}$ a pour valeur d'adhérence $1 \in [0,1]$ bien qu'elle ne prend aucune valeur dans $[0,1]$.
5. Soit (u_n) une suite qui a une valeur d'adhérence a dans $]0,1[$. Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a. Comme $0 < a < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset]0,1[$. Comme $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a, elle finit par appartenir à $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang n_0. Donc $(u_{\varphi(n+n_0)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de (u_n) entièrement incluse dans $]0,1[$ et la question 2) conclut.
6. La réciproque est fausse puisque la suite définie par $u_n = 1/(n+2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est entièrement incluse dans $]0,1[$ mais n'a aucune valeur d'adhérence dans $]0,1[$ puisqu'elle converge vers 0.