L3B – Topologie
2019-2020

Contrôle continu n^{o}1

Suggestion de correction

Questions de cours :

1. Le développement décimal propre d'un nombre réel x est un développement $x = n, a_1 a_2 a_2 a_3 a_4 \dots$ pour lequel la suite des décimales (a_n) n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.
2. Soit $x = \sum_{k\geq 0} 10^{-k} = 1,11111\dots$. Ce nombre n'est pas décimal mais il est rationnel puisque la somme des séries géométriques nous donne que $x = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{9}$. Le nombre $y = \sum_{k=0}^{3} 10^{-k} = 1,111$ est décimal puisque son développement n'a qu'un nombre fini de décimales non nulles. Il est évidemment rationnel puisque $y = \frac{1111}{1000}$. Les décimales non nulles du nombre $z = \sum_{k\geq 0} 10^{-10^k}$ consistent en des 1 placés à chaque position qui est une puissance de dix. Non seulement ce développement est infini mais il n'est pas périodique et donc z n'est ni décimal, ni rationnel.

Exercice 1 : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ son complémentaire. Si A est majoré, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leq M$. Donc $[M, +\infty[$ n'est pas dans A et doit être contenu dans A^c. En particulier, A^c ne peut être majoré.

Par contre, il est possible d'avoir à la fois A et A^c non majorés. Par exemple, si $A = \mathbb{Z}$, alors A^c contient $\mathbb{Z} + 1/2$ et aucun des deux ensembles n'est majoré.

Exercice 2 : Soient A et B deux parties minorées non vides de $\mathbb{R}$. On pose $m = \min(\inf A, \inf B)$ qui est bien défini par hypothèses.

Soit $x \in A \cup B$. Supposons que $x \in A$, comme $\inf A$ minore A, on a $x \geq \inf A \geq m$. De même, si $x \in B$, on a $x \geq \inf B \geq m$. Donc m est un minorant de $A \cup B$.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère $m + \varepsilon$. Si $m = \inf A$, comme $\inf A$ est le plus grand minorant de A, $m + \varepsilon$ ne minore pas A et il existe $a \in A$ tel que $m + \varepsilon > a$. Symétriquement, si $m = \inf B$, il existe $b \in B$ tel que $m + \varepsilon > b$. Dans les deux cas, il existe $x \in A \cup B$ tel que $m + \varepsilon > x$ et $m + \varepsilon$ ne minore pas $A \cup B$.

Au final, m est le plus grand des minorants de $A \cup B$ et donc $m = \min(\inf A, \inf B) = \inf(A \cup B)$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On veut montrer l'équivalence entre « $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$ » et « (u_n) a au moins une valeur d'adhérence ».

1. On suppose que $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que
$$\forall N \in \mathbb{N}\ ,\quad \exists n \geq N\ ,\quad |u_n| \leq M\ . \tag{1}$$
En prenant $N = 0$, (1) donne un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0}| \leq M$. On pose $\varphi(0) = n_0$. Puis on applique (1) à $N = n_0 + 1$ et on obtient un entier $n_1 > n_0$ tel que $|u_{n_1}| \leq M$. On pose $\varphi(1) = n_1$ et on note que par construction $\varphi(1) > \varphi(0)$. On continue ainsi de suite et on construit ainsi de proche en proche une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ pour tout n. On a donc construit une sous-suite bornée de (u_n).
2. Si $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, considérons la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ construite ci-dessus. Comme elle est bornée, on peut en extraite une sous-suite $(u_{\varphi(\phi(n))})$ qui converge vers un réel ℓ en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass. En posant $\psi = \varphi \circ \phi$, on obtient bien une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ de (u_n) qui converge vers ℓ.
3. La question précédente montre que si $|u_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, alors (u_n) a au moins une valeur d'adhérence ℓ. Réciproquement, si (u_n) a une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}$, alors il existe une sous-suite $(u_{\psi(n)})$ de (u_n) qui converge vers ℓ et comme $|u_{\varphi(n)}|$ tend vers $|\ell|$, on ne peut pas avoir que $|u_n|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, c'est-à-dire que (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $|a_n - b_n| \longrightarrow 0$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|a_n - b_n| \longrightarrow 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$. En particulier, $a_n - b_n \leq \varepsilon$ et donc $a_n \leq b_n + \varepsilon$. Par ailleurs, par monotonicité des suites, on a que
$$\forall n \geq N\ ,\quad a_N \leq a_n \leq b_n + \varepsilon \leq b_N + \varepsilon\ .$$
2. Fixons nous un $\varepsilon > 0$, par exemple $\varepsilon = 1$. D'après la question précédente, il existe un rang N_1 tel que pour $n \geq N_1$, $a_n \leq b_{N_1} + 1$. Comme (a_n) est croissante, on a pour $n < N_1$ que $a_n \leq a_{N_1} \leq b_{N_1} + 1$. On obtient donc que (a_n) est majorée par $b_{N_1} + 1$. Comme elle est croissante et majorée, elle converge dans $\mathbb{R}$. Le raisonnement symétrique donne que (b_n) est minorée par $a_{N_1} - 1$ et converge aussi. Par ailleurs, comme $|a_n - b_n| \longrightarrow 0$, les limites de ces suites doivent être égales.
3. Fixons n et m deux entiers. Le raisonnement précédent nous montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $k \geq N$, $a_k \leq b_k + \varepsilon$. Prenons un indice k tel que $k \geq \max(N, n, m)$, la monotonicité des suites donne que $a_n \leq a_k \leq b_k + \varepsilon \leq b_m + \varepsilon$. On a donc que $a_n \leq b_m + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, avec n et m fixés indépendants de ε. En prenant $\varepsilon \to 0$, on obtient donc que $a_n \leq b_m$.