L3B – Topologie
2020-2021

Feuille d'exercices 7 :
Continuité dans les espaces vectoriels normés

Exercice 1 : Pour chaque fonction ci-dessous, trouver l'ensemble des points du domaine de définition où la fonction est continue.

$$f \;:\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \in \mathbb{R}$$

$$g \;:\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{cases} y + x\sin(1/y), & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \in \mathbb{R}$$

$$h \;:\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \begin{cases} \frac{z(x^2-y^2)}{x^2+y^2+z^2}, & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Montrer que le graphe de f

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\,,\; y = f(x)\}$$

est une partie fermée. L'implication réciproque est-elle vraie ?

(*Indication : considérer par exemple la fonction* $f(x) = 1/x$ *si* $x \neq 0$, $f(0) = 0$)

Exercice 3 : Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit $f : F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction bornée dont le graphe G_f est fermé. Démontrer que f est continue.

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions linéaires suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, déterminer $|||f|||$ dans les deux cas :

(a) $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
(b) $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

1. $f_1(x,y) = x$.
2. $f_2(x,y) = -2y$.
3. $f_3(x,y) = x + \sqrt{3}y$.
4. $f_4(x,y) = (x + \sqrt{3}y, \sqrt{3}x - y)$.
5. $f_5(x,y) = (x + 2y, 2x + y)$.

Exercice 5 : Montrer qu'une application linéaire est continue si et seulement s'il existe un ouvert non vide sur lequel elle est bornée.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme dont $A = (a_{ij})$ est la matrice par rapport à la base canonique (e_i) de $\mathbb{R}^n$.

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $|||f||| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Calculer $|||f|||$.

Exercice 7 : Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle. Déterminer la norme triple de l'application linéaire associée de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ dans lui-même.

(*Indication : diagonaliser la matrice et montrer que la norme reste inchangée par la diagonalisation*)

Exercice 8 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que la formule $\|P\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)|$ définit une norme sur E.
2. Est-ce que les applications de suivantes de E dans E sont linéaires et continues : $P \to P'$, $P \to Q$ tel que $Q' = P$ et $Q(0) = 0$?
3. Est-ce que $f : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|)$ définie par $f(P) = P^2$ est continue ?

   (*Indication : On pourra considérer la suite (P_n) où $P_n(X) = X^n/(n+1)n!$*)

Exercice 9 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes suivantes : pour $f \in E$ on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que l'application $T_1 : f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ est une forme linéaire continue sur E muni des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$. Déterminer la norme de T_1 dans les deux cas.
2. Montrer que l'application $T_2 : f \mapsto f(\frac{1}{2})$ est une forme linéaire continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour la norme $\|\cdot\|_2$.
3. Dans les deux cas $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, déterminer si $F = \mathrm{Ker}\,\mathrm{T}_1$ est fermé ; complet.

Les questions suivantes ne concernent que la norme $\|\cdot\|_\infty$.

4. Montrer que l'ensemble $A = \{f \in E \mid -2 < \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt < 2\}$ est ouvert.
5. Déterminer son adhérence $\overline{A}$ et sa frontière ∂A.
6. Montrer que l'adhérence $\overline{A}$ n'est pas bornée. Est-elle compacte ?
7. Est-ce que la partie $B = \overline{A} \cap \{f \in E \mid \|f\|_\infty \le 3\}$ est compacte ?