Feuille d'exercices 4 :

Fonctions réelles

Exercice 1 : Coercivité
Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *coercive* si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'une fonction continue et coercive sur $\mathbb{R}$ est minorée et atteint son minimum.
2. Montrer qu'une fonction continue et minorée est coercive si et seulement si l'image réciproque de tout compact par f est compacte.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f a des limites finies $\ell_\pm \in \mathbb{R}$ en $\pm\infty$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $\ell_+ = \ell_-$, alors f atteint une de ses bornes mais montrer qu'elle n'atteint pas forcément les deux.

Exercice 3 : Point fixe d'une fonction pas uniformément contractante
Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ et $f : K \subseteq \mathbb{R} \to K$ une fonction qui satisfait

$$\forall x, y \in K \text{ avec } x \neq y \ , \quad |f(x) - f(y)| < |x - y| \ . \tag{1}$$

1. Montrer que si K est compact, alors f admet un unique point fixe
   Indication : considérer le minimum de $\varphi(x) = |f(x) - x|$ et utiliser (1).
2. Montrer que ce n'est plus vrai si K est fermé mais pas compact.
3. Donner un exemple d'une fonction sans point fixe sur un compact K mais qui vérifie (1) avec une inégalité large.

Exercice 4 : Équation fonctionnelle n° 1
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et telle que $f(x) = f(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que dire de f ?

Exercice 5 : Équation fonctionnelle n° 2
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(x+y)+f(x-y) = 2\,(f(x) + f(y))$ pour tous x, y réels.

1. Trouver $f(0)$ et la parité de f. Donner un exemple d'une telle fonction.
2. Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n, $f(nx) = n^2 f(x)$.
3. Montrer que pour tout rationnel r, $f(r) = r^2 f(1)$.
4. Conclure.

! ▶ Exercice 6 : Hiérarchie des notions
Donner et prouver les implications entre les notions « la fonction f est continue », « la fonction f est uniformément continue » et « la fonction f est $K-$lipschitzienne ». Donner un contre-exemple pour chaque implication fausse.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue telle que la suite $(f(n))_n \in \mathbb{N}$ tende vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Donner un contre-exemple si f est seulement supposée continue.

! ▶ **Exercice 8 : Opération sur les fonctions uniformément continues.**

1. Montrer que si $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \subset \mathbb{R} \to K \subset \mathbb{R}$ sont des fonctions uniformément continues, alors $g \circ f$ est uniformément continue.
2. En déduire que si g est continue et f uniformément continue et bornée, alors $g \circ f$ est uniformément continue. Donner un contre-exemple si f n'est pas supposée bornée.
3. Soit $f :]a, c[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les restrictions $f|_{]a,b]}$ et $f|_{[b,c[}$ sont uniformément continues. Démontrer que f est uniformément continue.
4. Soit f et g deux fonctions uniformément continues et bornées sur $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que le produit fg est uniformément continu. Donner un contre-exemple si f n'est pas supposée bornée.

Exercice 9 : Prolongement de fonctions

1. Soit $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \sin\left(1/(x - \sqrt{2})\right)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{Q}$ mais ne peut pas être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. ★ Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe une unique fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}_{|\mathbb{Q}} = f$.

Exercice 10 : Soit ϕ une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, satisfaisant à $\phi(0) = 0$, $\lim_{+\infty} \phi = 0$.

1. Montrer que les suites $f_n = \frac{1}{n}\phi$ et $g_n : x \mapsto \phi(x - n)$ convergent uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que les suites $h_n : x \mapsto \phi(nx)$ et $k_n : x \mapsto \phi(x/n)$ convergent simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$, mais non uniformément.

Exercice 11 : On considère la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = (\sin x)^n \cos x$. Montrer que la suite (f_n) tend uniformément vers 0.

Exercice 12 : Complétude de l'espace des polynômes
Soit $(P_n)_n$ une suite de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme et que, pour n assez grand, le polynôme $P_n - f$ se réduit à une constante C_n.

★ **Exercice 13 : Un théorème de Dini**
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes sur un intervalle compact $[a, b]$.

1. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle. Montrer que cette convergence est uniforme.
2. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge vers une fonction f continue. Montrer que cette convergence est uniforme.
   Indication : subdiviser l'intervalle $[a, b]$ *en petits segments.*