Feuille d'exercices 3 :
Topologie de la droite réelle

Exercice 1 : On considère l'ensemble $\mathbb{N}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que chaque singleton $\{n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ est un fermé. Peut-on déduire de l'écriture $\mathbb{N} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}$ que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$?
3. Montrer que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ à l'aide de la caractérisation séquentielle.
4. Montrer que $]-\infty, 0[\cup \left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\,]n, n+1[\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En déduire une autre preuve que $\mathbb{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
5. Pour les ensembles $\mathbb{Z} \cup]0,1[$ et $\mathbb{Q} \cap]0,1[$, dire s'ils sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}$ et donner leur intérieur et leur adhérence.

! ▶ **Exercice 2 :** Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer $\overline{\mathring{A}}$ et $\overline{A}$; $\mathring{\overline{A}}$ et $\mathring{A}$
3. Pour chacune des paires d'ensembles suivantes, dire quelles inclusions sont vraies ou fausses, et le justifier.

   (a) $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ (b) $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ (c) $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$ (d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$

Exercice 3 : L'adhérence des valeurs d'une suite 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de ses valeurs. On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Déterminer l'adhérence $\overline{U}$ de U.

★ **Exercice 4 : L'adhérence des valeurs d'une suite 2**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de ses valeurs.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence A de la suite (u_n) est fermé.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n = \{u_k, k \geq n\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_n) est exactement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n$. En déduire une autre démonstration du fait qu'il est fermé.
3. Montrer que pour toute suite (u_n), $\overline{U} = A \cup U$.

Exercice 5 : Cas de la borne supérieure
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup A$ est l'unique réel qui soit à la fois un majorant de A et un point adhérent à A.
2. Montrer que si A n'admet pas de plus grand élément, $\sup A$ est un point d'accumulation de A.

Exercice 6 : Si f est une fonction continue, on pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}.$$

Montrer que $\overline{A} \subset B$ et $A \subset \mathring{B}$ mais qu'il n'y a pas égalité en général.

Exercice 7 : Points isolés
Soit S une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $p \in S$ est un *point isolé* de S s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\cap S = \{p\}$. On note $\mathrm{Isol}(S)$ l'ensemble des points isolés de S.

On dit que p est un point d'accumulation de S si $(]p-\varepsilon, p[\cup]p, p+\varepsilon[) \cap S \neq \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$. On note $\mathrm{Acc}(S)$ l'ensemble des points d'accumulation de S.

1. Donner un exemple d'ensemble S avec un point isolé, un point d'accumulation qui appartient à S, et un point d'accumulation qui n'appartient pas à S.
2. Montrer que $\mathrm{Isol}(S) \cup \mathrm{Acc}(S) = \overline{S}$ et que $\mathrm{Isol}(S) \cap \mathrm{Acc}(S) = \emptyset$.
3. Montrer que $\mathrm{Acc}(S)$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donner un exemple où $\mathrm{Isol}(S)$ n'est pas fermé.
4. Montrer que, si $x \in \mathrm{Isol}\left(\overline{S}\right)$, $x \in S$.
5. Montrer qu'un ensemble compact dont tous les points sont isolés est fini.
6. Si A est fermé et x est isolé dans A, alors $A \setminus \{x\}$ est fermé.

Exercice 8 : Exprimer les parties suivantes de $\mathbb{R}$ à partir d'images réciproques de sous-ensembles plus simples. Déterminer si elles sont ouvertes, fermées...

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \leq 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2-1| > e^x\}$ $\quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{ch} x \geq 3 \text{ ou } \operatorname{ch} x = 2\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 1/3 \text{ et } \cos x < 1/5\}$ $\quad E = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq e^{-x}\}$

Exercice 9 : Distance à un ensemble
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x on définit la distance de x à A par

$$d_A(x) = \inf\{|x-a|, a \in A\} .$$

1. Expliciter d_A dans les cas : $A =]0,1]$, $A = [0,1]$, $A = \mathbb{Q}$.
2. ! ▶ Montrer que d_A est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et en déduire qu'elle est continue.
3. Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Exercice 10 : Distance entre deux ensembles
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit la distance entre A et B par

$$d(A,B) = \inf\{|a-b|, a \in A, b \in B\} .$$

1. Montrer que si A est fermé et B est compact, alors $d(A,B) = 0$ si et seulement si $A \cap B \neq \emptyset$.
2. ★ Donner un exemple de fermés A et B tels que $d(A,B) = 0$ et $A \cap B = \emptyset$.

★ **Exercice 11 : Ensemble de Cantor**
On pose $I_0 = [0,1]$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = \frac{1}{3} I_k \cup \left(\frac{1}{3} I_k + \frac{2}{3}\right)$. L'ensemble triadique de Cantor est défini comme $\mathcal{K} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_n$.

1. Montrer que $\mathcal{K}$ est un compact de $\mathbb{R}$.
2. Calculer la somme des longueurs des intervalles constituant I_k et en déduire que $\mathcal{K}$ est d'intérieur vide.
3. Montrer qu'aucun point de $\mathcal{K}$ n'est isolé.
4. Montrer que $\mathcal{K}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.