Feuille d'exercices 1 :
Travail sur la logique mathématique

Exercice 1 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes.

1. f est décroissante.
2. f n'est pas croissante.
3. f est injective. Donner un exemple et un contre-exemple de fonction injective.
4. f n'est pas surjective. Donner un exemple et un contre-exemple de fonction surjective.

Exercice 2 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propriétés suivantes.

(i) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$
(ii) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$
(iii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq M \implies \exists \ell \in \mathbb{R},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

1. Que signifie la condition (i) ? Ecrire la négation de (i).
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ donnés, simplifier l'expression $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. En déduire la signification de la condition (ii).
3. Montrer que (iii) est toujours vérifiée.

Exercice 3 : Recouvrement de $\mathbb{R}$ par des intervalles
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux deux propriétés suivantes.

(i) Les ensembles A_n sont deux à deux disjoints.
(ii) Les ensembles A_n recouvrent $\mathbb{R}$, c'est à dire, $\cup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R}$.

1. Écrire ces deux propriétés à l'aide de symboles mathématiques, sans utiliser $\cup$ ni $\cap$.
2. Montrer qu'on peut trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = ([x_n, x_n + 1[)$ remplisse les conditions ci-dessus.
3. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = (]x_n, x_n + 1[)$ remplisse les conditions ci-dessus.
4. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de trouver une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, telle que la famille d'intervalles $A_n = ([x_n, x_n + 1])$ remplisse les conditions ci-dessus.
5. ★ Que peut-on dire pour des familles d'intervalles $A_n = (]a_n, b_n[)$ ou $([a_n, b_n])$ de longueurs quelconques ?

Exercice 4 : Rationnels et irrationnels
Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si r et s sont rationnels alors $r + s$ est rationnel.
2. Si r et s sont rationnels alors rs est rationnel.
3. Si r est rationnel et x est irrationnel, alors $r + s$ est irrationnel.
4. Si r est rationnel et x est irrationnel alors rs est irrationnel.
5. Si r et s sont irrationnels alors $r + s$ est irrationnel.
6. Si r et s sont irrationnels alors rs est irrationnel.

! ▶ Exercice 5 : Négation des convergences ou des bornes

1. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que le fait que (u_n) ne tende pas vers $+\infty$ est équivalent à la possibilité d'en extraire une sous-suite majorée.
2. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que le fait que (u_n) ne tende pas vers 0 est équivalent à l'existence d'un $\epsilon > 0$ et d'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ tels que, pour tout n, on ait $|u_{\varphi(n)}| > \epsilon$.
3. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que le fait que (u_n) ne soit pas majorée est équivalent à l'existence d'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

Exercice 6 : Montrer que toute suite convergente de nombres entiers est stationnaire.

Exercice 7 : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que la sous-suite $(x_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers a, que la sous-suite $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers b et que la sous-suite $(x_{3n})_{n\geq 0}$ converge vers c. Montrer que $a = b = c$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

! ▶ Exercice 8 : La valeur absolue

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| - |b| \leq |a - b|$.
2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| \leq \max(|a|, |b|)$.
3. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| \leq |a - (a + b)/2| + |b - (a + b)/2|$.

Exercice 9 : Moyennes de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $c_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ la moyenne arithmétique des n premiers termes. La suite (c_n) est appelée *suite des moyennes de Cesàro* de (u_n).

1. Montrer que si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (c_n) converge aussi vers 0. En déduire que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors la suite (c_n) converge aussi vers ℓ.
2. Pour $u_n = (-1)^n$, montrer que (c_n) tend vers 0.
3. Soit (v_n) une suite de réels telle que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ converge vers ℓ, montrer que la suite (v_n/n) converge vers ℓ.

★ Exercice 10 : Irrationnalité de e

Soient $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire l'existence d'un réel e tel que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers (premiers entre eux) conduit à une contradiction en choisissant une certaine valeur de n dans la double inégalité précédente. Conclure.

★ Exercice 11 : Sous-suite croissante

Le but de cette exercice est de montrer que de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.

1. Traiter le cas où $x_n \longrightarrow +\infty$.
2. En déduire le cas où (x_n) n'est pas bornée.
3. Pour traiter le cas (x_n) bornée, on séparera le cas où pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sup_{n\geq N} u_n$ est atteint du cas contraire.