Université Stendhal Année 2013-2014
Option mathématiques

Feuille 3 : Divisibilité, PGCD, PPCM

Divisibilité

Exercice 1 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) Tout multiple de 3 est multiple de 9.
2) Un nombre divisible par 4 est divisible par 2.
3) Un nombre divisible par 2 est divisible par 4.
4) Tout nombre divisible par 12 est divisible par 24.

Exercice 2 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.
2) Le nombre $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$ est un nombre premier.

Exercice 3 : On considère le nombre $N = 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77 + 77$.
Parmi les affirmations ci-dessous, lesquelles sont vraies ? (on *ne* calculera *pas* N)

1. N est un nombre impair.
2. N est supérieur à 1000.
3. N est un multiple de 11.
4. N est divisible par 21.
5. N est inférieur à 3000.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n^2 est impair si et seulement si n est impair.

Décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers

Exercice 5 : Écrire la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants :

231 153 600 221 211 le nombre N de l'exercice 3.

Exercice 6 : Quel est le nombre de diviseurs des nombres suivants ?

20 48 180 .

Exercice 7 : Les nombres suivants sont-ils premiers entre eux ?
8 et 42 ; 24 et 15 ; 143 et 63 ; 111 et 115 .

Exercice 8 : Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) Un nombre entier positif divisible par 6 et par 4 est divisible par 24.
2) Un nombre entier positif divisible par 6 et par 5 est divisible par 30.

Exercice 9 : *Bordeaux, Caen 2000*
Le service des espaces verts veut border un espace rectangulaire de 924 m de long sur 728 m de large à l'aide d'arbustes régulièrement espacés : la distance entre deux arbustes consécutifs doit être constante, égal à un nombre entier de mètres. Un arbuste sera placé à chaque angle du terrain.
1) Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.
2) Déterminer, dans chaque cas, le nombre d'arbustes nécessaires à la plantation.

Exercice 10 : *Nancy 2002*
Déterminer le nombre N satisfaisant simultanément aux trois conditions : N est divisible par 6 ; N n'est pas divisible par 8 ; N a exactement 15 diviseurs.

On rappelle que si la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est de la forme $A^aB^bC^c$..., alors le nombre de ses diviseurs est $(a+1)(b+1)(c+1)$...

PGCD et PPCM

Exercice 11 : Donner le PGCD et le PPCM des couples d'entiers suivants :
8 et 42 ; 24 et 15 ; 49 et 14 ; 22 et 48 .

Exercice 12 :
1) Le PGCD de deux nombres est 18. Leur PPCM est 648. Quels sont ces deux nombres ?
2) Trouver le PGCD et le PPCM des nombres 4125 et 2700. Calculer le produit de ces 2 nombres puis le produit de leur PGCD par leur PPCM. Que constate-t-on ?

Exercice 13 : Deux voitures font des tours sur un circuit fermé, elles partent toutes les deux à midi de la ligne de départ. L'une parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes. À quelle heure les deux voitures repasseront-elles (pour la première fois) en même temps la ligne de départ ? Combien chacune aura-t-elle fait de tours ?