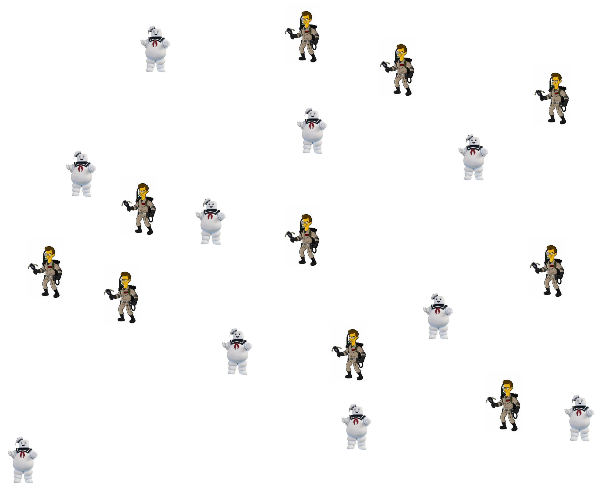
Math En Jeans
Sujets pour des activités de recherche tous niveaux

Romain Joly

Sujet n°1 : "Don't cross the streams"

> *There's something very important I forgot to tell you ! Don't cross the streams... It would be bad... Try to imagine all life as you know it stopping instantaneously and every molecule in your body exploding at the speed of light.*
> Dr. Egon Spengler

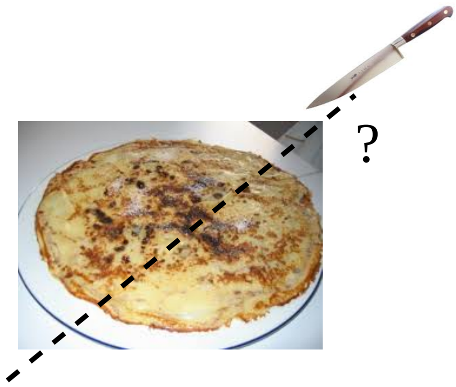
Les chasseurs de fantômes *Ghostbusters* utilisent des rayons pour neutraliser les fantômes. Comme l'indique la citation ci-dessus, il est primordial que ces rayons ne se croisent jamais. Imaginons dix fantômes chassés par dix *Ghostbusters*. Ces derniers peuvent-ils se répartir les fantômes afin que chacun tire sur un fantôme sans qu'aucun rayon ne se croise ? Peut-on trouver une méthode pour construire la solution par ordinateur ?



Peut-on toujours relier chacun des dix chasseurs à son fantôme sans qu'aucun des segments ne se croisent ?

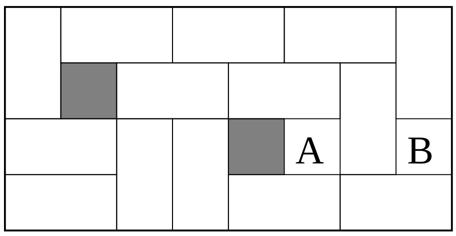
Sujet n^{o}2 : crêpe au sucre

Deux amis ont commandé une crêpe au sucre dans un petit restaurant. Ils n'ont pas très faim et souhaitent la partager en deux. Le premier dit : “Si la crêpe était parfaitement circulaire et le sucre parfaitement réparti, je pourrais partager la crêpe en un seul coup de couteau en deux parts parfaitement égales. Malheureusement, ce n'est pas le cas, l'un de nous aura donc moins de crêpe ou de sucre que l'autre”. Le second ami, par ailleurs mathématicien, lui répondit : “Au contraire, tu peux toujours couper la crêpe en un coup de couteau afin que chaque part ait exactement la même quantité de crêpe et de sucre”. Qui a raison ?



Sujet n^{o}3 : rénovation d'appartement

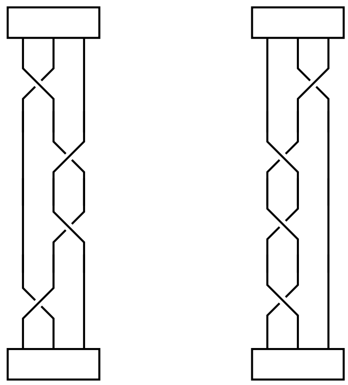
R. souhaite poser un nouveau carrelage dans son salon. Celui-ci fait 4×8m et le carrelage est composé de dalles rectangulaires de 1×2m. Le problème est que deux poteaux de 1×1m se trouvent dans le salon et qu'ils ne peuvent être retirés. R. va-t-il réussir à carreler son salon ?



Un exemple de carrelage raté. Les poteaux sont en gris et les cases A et B ne peuvent pas être carrelées.

Sujet n°4 : démêlage de tresses

Une tresse consiste en n fils disposés verticalement qui s'entremêlent en divers croisements et sont attachés en haut et en bas. Si on peut retirer tous les croisements d'une tresse sans couper de fil ni bouger leurs extrémités, on dira que la tresse est triviale. Ci-dessous, on voit deux tresses à trois brins, à gauche une triviale et à droite une non-triviale :

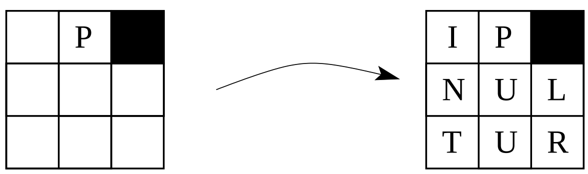


• **Les tresses borroméennes.** Existe-t-il des tresses non-triviales telles que si on ôte n'importe lequel de ses brins (par exemple si on le coupe) alors la tresse devient triviale ?

• **Les anti-tresses.** Est-il possible de coller sous une tresse une autre tresse telle que la tresse obtenue soit triviale ?

Sujet n°5 : les jeux *turlupin* et *carabistouilles*

On joue au *turlupin* comme suit. On utilise une grille 3×3 et on colorie une case en noir. On met entre 0 et 2 lettres du mot *turlupin* dans la grille et le but est ensuite d'écrire le mot *turlupin* en entier dans la grille en respectant les conditions suivantes :
- une lettre doit être écrite dans une case voisine de la précédente,
- il y a exactement une lettre par case et aucune lettre n'est écrite sur la case noircie,
- on doit respecter les positions des lettres éventuellement inscrites au préalable.
Le jeu *carabistouilles* est semblable, sauf que la grille est de 4×4 cases.



Un exemple de position initiale — La grille remplie

En fonction de la position de la case noire et des zéro, une ou deux lettres placées au départ, est-il toujours possible de trouver une solution ? Si oui, est-elle unique ?

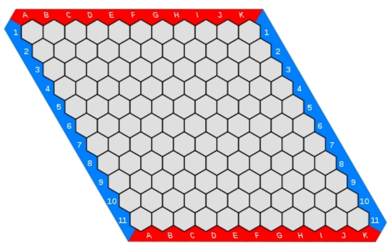
Sujet n°6 : Dobble

Le matériel du jeu Dobble consiste en 55 cartes sur lesquelles sont dessinés 8 symboles. Quelle que soit la façon de jouer (il y a plusieurs règles possibles), le but est toujours de repérer le plus rapidement possible un symbole commun entre deux cartes. En effet, deux cartes du jeu Dobble ont toujours *un et un seul* symbole commun, comme dans l'exemple ci-dessous :

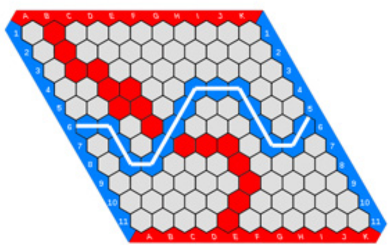
Comment le jeu est-il construit ? Combien de symboles faut-il pour faire un jeu de 10 cartes ?

Sujet n°7 : le jeu des hexagones

Le jeu des hexagones se joue sur un plateau en forme de losange découpé en petits hexagones :



Chaque joueur pose tour à tour un hexagone de sa couleur sur une case vide du plateau. Le but du jeu est d'être le premier à relier les deux bords de sa couleur :



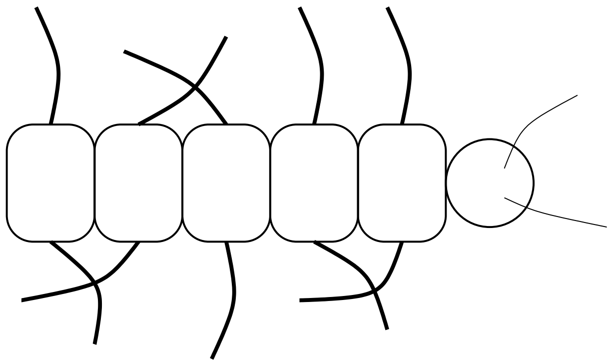
Peut-il exister une partie nulle ? Y a-t-il une stratégie gagnante pour un des joueurs et si oui lequel ? Pourquoi ne pas jouer avec un pavage selon des petits carrés ?

Sujet n°8 : comptons sur les doigts

En France, on compte sur les doigts des deux mains de 0 à 10 en levant un par un les doigts du pouce à l'auriculaire. Mais cette habitude n'est pas la même suivant les cultures : certains européens ne lèvent pas les doigts dans le même ordre. On peut aussi compter beaucoup plus loin comme le font certains peuples. Par exemple le pouce peut décrire les phalanges des autres doigts et on peut ainsi compter jusqu'à 12 sur une seule main. Certains ont inventé des façons de compter jusqu'à 100 sur une seule main !

• **Comptages chez les humains.** Avec la méthode des phalanges, jusqu'à combien peut-on compter avec deux mains ? Si on s'autorise n'importe quelle combinaison de doigts pliés ou ouverts, jusqu'à combien peut-on compter sur une main ? Peut-on faire des additions facilement avec cette méthode ?

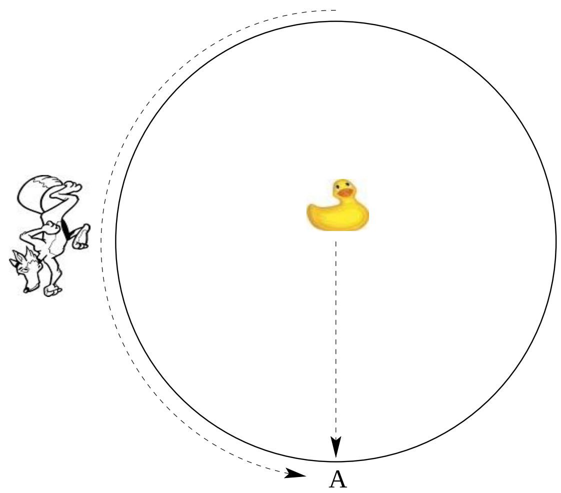
• **Comptages chez les n-pattes.** Les n-pattes sont des invertébrés qui ont entre 2 et 500 paires de pattes. Ils ne sont pas assez souples pour les plier, aussi leurs mathématiciens ont mis au point la façon suivante de compter : chaque nombre est représenté par une combinaison précise de croisements de pattes. Seules deux pattes voisines peuvent se croiser et une patte ne peut se croiser qu'avec une seule autre. Par exemple, voici un 10-pattes représentant un nombre :

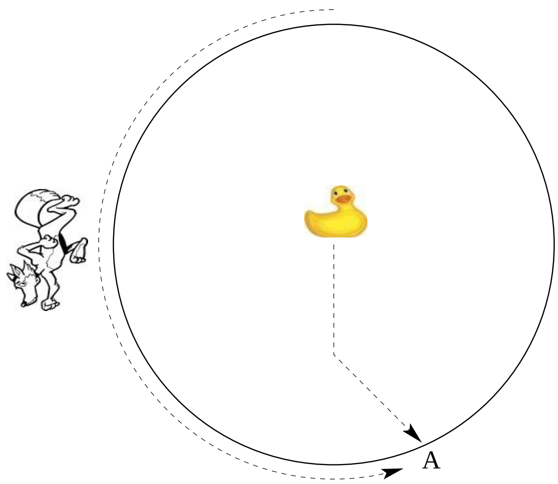


Combien de nombres peut représenter un $n-$pattes ?

Sujet n°9 : le canard et le loup

Un canard est au centre d'une mare parfaitement circulaire, qu'il peut parcourir librement. Son but est d'atteindre la berge. Malheureusement, un loup rôde autour de la mare et attend pour manger le canard dès que ce dernier aura mis une patte à terre. Le loup ne sait pas nager, mais peut courir tout autour de la mare. Bien sûr, chaque animal ne peut dépasser sa vitesse maximale, mais à part cela, toute tactique de déplacement est envisageable. Quelle est la meilleure stratégie pour chaque animal ? Le canard va-t-il atteindre la berge sans être mangé ?

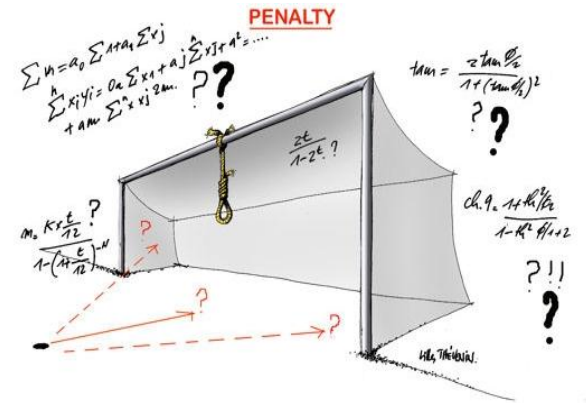




A gauche, la stratégie la plus simple, en ligne droite, pour le canard. A droite, une stratégie plus complexe où le canard va rectifier sa trajectoire en fonction du comportement du loup. Le canard va-t-il arriver en A avant le loup ?

Sujet n°10 : tirs au but

Un joueur de foot tire une longue série de pénalties. Il peut choisir entre tirer à gauche ou à droite. En face de lui, le gardien peut choisir de plonger vers la droite ou la gauche. Si les deux joueurs choisissent la même direction, le tir est arrêté, sinon le but est marqué. Naturellement, choisir toujours le même côté n'est pas une bonne stratégie car l'adversaire s'adaptera rapidement pour contrer la stratégie. De la même façon, changer de direction à chaque tir est trop régulier. Quelle est la meilleure stratégie pour chacun des joueurs ? Si le tireur est un humain, peut-on faire en sorte qu'un gardien programmé informatiquement gagne à tous les coups sur une longue série de pénalties ?



Supposons maintenant que le tireur est moins bon pour les tirs vers la gauche : s'il tire à gauche, il rate une fois sur deux, même si le gardien a plongé à droite. Bien sûr, le tireur préfèrerait tirer le plus souvent à droite, mais le faire tout le temps est une mauvaise idée. Quelle est la bonne stratégie ?

Par exemple, supposons que le tireur tire à droite une fois sur trois. Voici quelques pourcentages de réussite contre différentes stratégies du gardien.

Le gardien change de direction tout le temps.

Tireur	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	
Gardien	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	
Resultat	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	45%

Le gardien tire la direction à pile ou face.

Tireur	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	
Gardien	D	G	D	G	G	D	D	G	G	G	D	G	D	D	G	D	D	G	G	D	
Resultat	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	45%

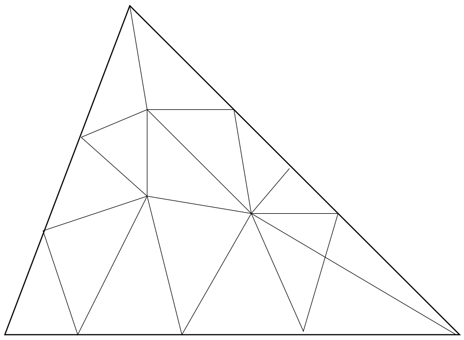
Le gardien plonge dans la direction opposée au tir précédent.

Tireur	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	G	D	G	
Gardien	D	G	D	D	G	D	D	G	D	D	G	D	D	G	D	D	G	D	D	G	
Resultat	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	30%

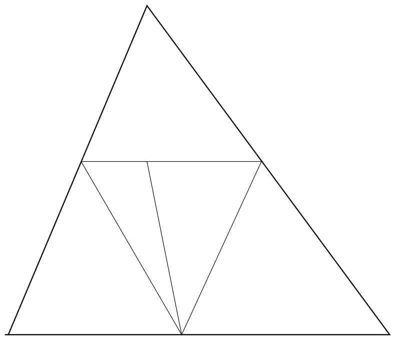
La dernière stratégie du gardien donne un score bien en-dessous de la moyenne. Comme le tireur ne sait pas quelle stratégie utilisera le gardien, il ne peut être sûr d'avoir un bon taux de réussite avec cette stratégie. Comment faire mieux ?

Sujet n°11 : coloriage d'un triangle

On part d'un grand triangle, que l'on découpe en plusieurs petits triangles tels que le côté d'un petit triangle soit exactement le côté d'un autre petit triangle ou bien sur un des côtés du grand triangle (on dit qu'on triangule le triangle de départ).



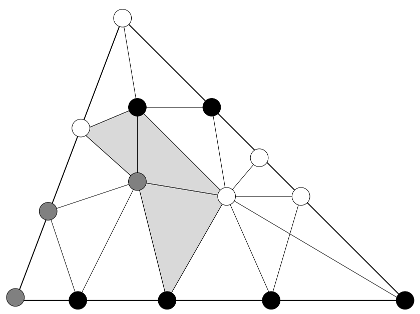
une triangulation correcte



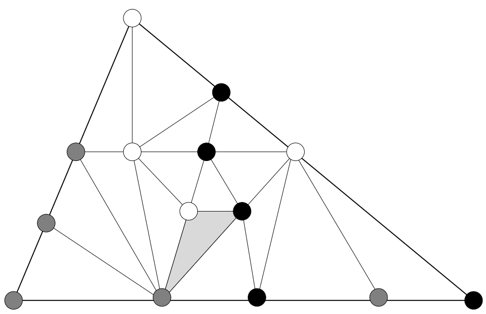
une triangulation incorrecte

On colorie les sommets de la triangulation comme suit : chaque sommet du grand triangle a sa propre couleur, disons rouge, vert et bleu. Chaque sommet des petits triangles qui sont sur le côté rouge-vert du grand sont coloriés soit en rouge, soit en vert et de même pour les côtés rouge-bleu et vert-bleu. Il n'y a aucune contrainte pour les sommets au centre du grand triangle.

Il semble qu'à chaque fois qu'on suit ces règles, il y a au moins un petit triangle dont les trois sommets sont des trois couleurs possibles.



un exemple avec trois triangles tricolores



un exemple avec un triangle tricolore

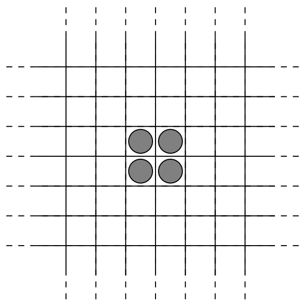
Est-ce toujours le cas, ou peut-on trouver un contre-exemple ?

Sujet n^{o}12 : un tour de magie

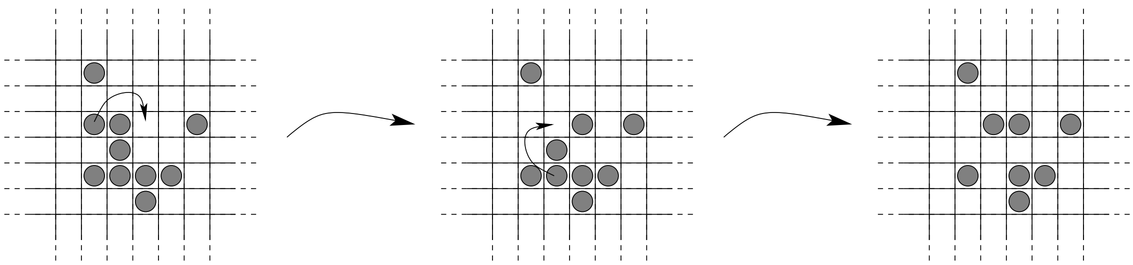
Gérard le magicien propose le tour suivant. Au début du tour, il sort de la salle. Son assistant demande alors au public de tirer n cartes au hasard parmi un jeu de 52 cartes. L'assistant récupère les n cartes, en pose $n-1$ face découverte sur la table et la dernière face cachée. Le magicien rentre, regarde les cartes et énonce parfaitement la valeur et la couleur de la carte cachée. Gérard prétend y arriver avec $n = 5$ cartes. Cela est-il possible, ou le magicien est-il télépathe ? Peut-on y arriver avec $n = 4$? Et si c'est le public qui choisit la carte qui est cachée ? Combien de cartes faut-il avec les jeux syldaves de 100 cartes portant simplement les numéros de 1 à 100 ?

Sujet n^{o}13 : le solitaire

On joue au jeu suivant. Un carré $n \times n$ de pions est placé sur une grille infinie. Par exemple, le cas 2×2 est comme suit :



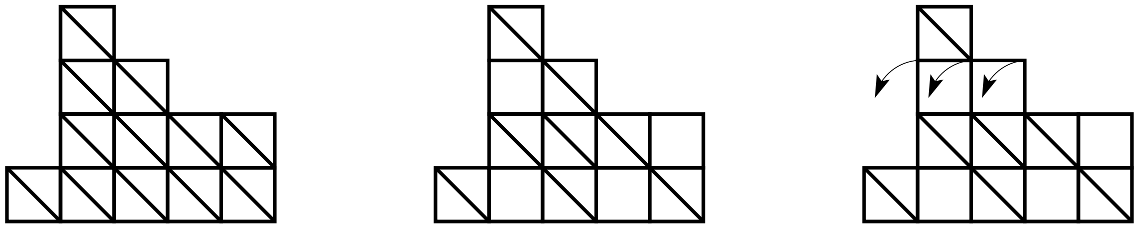
On suit alors les règles du solitaire : un pion peut sauter par dessus un autre verticalement ou horizontalement pour arriver dans une case vide. Le pion sauté est alors capturé et retiré du plateau. Voici des exemples de mouvements :



Le but du jeu est de capturer tous les pions, sauf bien sûr le dernier. S'il est facile de gagner dans le cas 2×2, qu'en est-il pour le carré 3×3 ou le 4×4 ?

Sujet n°14 : échafaudages

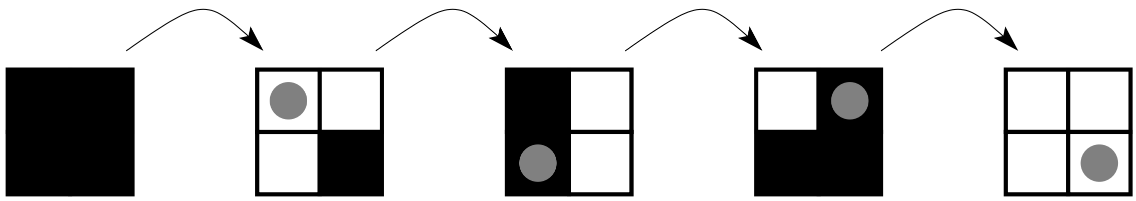
Si on fixe quatre tiges métalliques bout à bout en forme de carré, on voit que l'ensemble n'est pas rigide et peut se déformer en un losange. Pour rigidifier le tout, on ajoute donc une barre diagonale. Un échafaudage est un assemblage de tels carrés. On s'aperçoit rapidement que l'on n'est pas obligé d'ajouter une diagonale à tous les carrés pour que l'ensemble soit rigide. Par soucis d'économie, on aimerait mettre le minimum de barres diagonales tout en gardant un échafaudage rigide. Comment faire ? Quel est le nombre minimum de diagonales à ajouter ?



A gauche, un échafaudage complet. Au centre, on a économisé certaines barres diagonales tout en gardant un échafaudage rigide. A droite, trop de diagonales ont été retirées et un étage peut s'effondrer.

Sujet n°15 : tout noir/tout blanc

Le joueur dispose d'un ensemble des tuiles ayant un côté blanc et un côté noir. Elles sont dispoées en rectangle (ou forme plus complexe) sur une grille, face noire visible. Le mouvements que peut faire le joueur sont les suivants : il retourne une tuile et toutes ses voisines horizontales et verticales (éventuellement la tuile n'a pas des voisines partout, la couleur des tuiles retournées n'a pas d'importance). En partant de la position initiale « tout noir », le joueur peut-il arriver sur la position « tout blanc » ?



Exemple de résolution du cas 2×2. Le rond désigne pour chaque coup la tuile centrale retournée.