Préparation à l'agrégation externe de mathématique — Université de Grenoble
Option B calcul scientifique — 2009/2010

Résolution de systèmes linéaires

Méthodes directes

Exercice 1 : Méthode LU.
Rappeler le principe de la décomposition LU et comment l'utiliser pour résoudre un système linéaire $Ax = b$.

Exercice 2 : Décomposition QR.
On munit $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien canonique $< x|y >= \sum x_i \overline{y}_i$.
1) Soient $a_1, ..., a_n$ des vecteurs formant une base de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $q_1, ..., q_n$ et des nombres complexes r_{ij} $(i \leq j)$ tels que r_{ii} est un réel positif pour tout i et

$$\begin{cases} a_1 = r_{11}q_1 \\ a_2 = r_{12}q_1 + r_{22}q_2 \\ \quad\vdots \\ a_n = r_{1n}q_1 + \ldots + r_{nn}q_n \end{cases}$$

2) En déduire que toute matrice inversible A peut s'écrire $A = QR$ où Q est unitaire et R est triangulaire supérieure à éléments diagonaux réels et positifs et que cette décomposition est unique.
3) Comment utiliser cette décomposition pour résoudre facilement le système $Ax = b$?
4) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que ${}^t\overline{A}A$ est hermitienne définie positive. Quel est le lien entre la décomposition de Choleski et la décomposition QR ?

Exercice 3 : Décomposition de Choleski.
Soit A une matrice hermitienne définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire inférieure L qui a des éléments diagonaux réels strictement positifs et est telle que $A = L{}^t\overline{L}$ (décomposition de Choleski). Cet algorithme est-il appliquable à des matrices non hermitiennes ? Expliquer comment utiliser la décomposition de Choleski pour résoudre le système $Ax = b$ et donner le nombre d'opérations.

TP Scilab : Dans ce TP, on pourra utiliser la commande `inv` pour inverser les matrices triangulaires.
1) Programmer la décomposition LU (on supposera qu'on ne tombera jamais sur un élément diagonal nul). L'utiliser pour inverser une matrice A.
2) Programmer la décomposition QR et l'utiliser pour faire un programme inversant une matrice A.

Méthodes indirectes

Exercice 4 : Matrices à diagonale dominante.
On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme triple associée.
1) Montrer que

$$|||A|||_\infty \equiv \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

2) Donner une condition suffisante sur A pour que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $A^k x \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow 0$. Cette condition est-elle nécessaire ?

On appelle matrice à diagonale dominante une matrice $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que, pour $i = 1, ..., n$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \ .$$

3) Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.
4) On souhaite appliquer la méthode de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$ où A est à diagonale dominante. On pose

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = -\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

La méthode de Jacobi consiste à rechercher le point fixe de quelle fonction ? Montrer que la méthode de Jacobi converge toujours si A est à diagonale dominante.

TP Scilab : Programmer la méthode de Jacobi pour inverser une matrice A.

De l'intérêt des méthodes de résolution

Exercice 5 : Donner l'ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires pour calculer le déterminant et l'inverse d'une matrice A de taille $n \times n$ grâce aux formules

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{com}(A)\ .$$

Même question mais en utilisant la décomposition $A = LU$ (méthode de Gauss).
Un ordinateur standard effectue de l'ordre de 10^{10} opérations par secondes (10 gigaflops). Comparer les temps nécessaires dans le cas d'une matrice 100×100.

Exercice 6 : Conditionnement d'une matrice
Pour résoudre le système $Ax = b$, il faut connaître A et b. En général, ceux-ci ne sont pas connus avec une précision infinie car il peut y avoir des erreurs de mesures et car la précision des instruments et de l'ordinateur n'est pas infinie. On s'intéresse donc à l'erreur qui peut être commise sur x à cause des imprécisions sur A et b. La valeur pertinente est l'erreur relative $\|\delta x\|/\|x\|$.

On considère le système $Ax = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Les données A et b sont imprécises. On a donc en réalité le système linéaire

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b\ .$$

Etant donnée une norme matricielle, on définit le conditionnement de la matrice A par $\kappa(A) = |||A|||.|||A^{-1}|||$.
1) Montrer que si $\frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \leq \frac{1}{\kappa(A)}$, on a

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{|||\delta A|||}{|||A|||}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \right)$$

2) Montrer que le conditionnement de A est minoré par le rapport $|\lambda_n/\lambda_1|$, où λ_n et λ_1 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre en module.
3) Calculer explicitement, en fonction de δb, l'erreur δx commise sur x si on résoud $A(x + \delta x) = b + \delta b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

TP Scilab : Illustrer le problème du conditionnement du mieux possible.