Mini DM : section de Poincaré

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteur. On considère l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d \; . \tag{1}$$

On supposera que $p(t)$ est une orbite périodique de (1) de période T telle que $p(0) = 0$ et $\dot{p}(0) = (1, 0, \ldots, 0)$. On notera $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la projection sur la première composante et

$$\mathcal{P}_\eta = \{x \in \mathbb{R}^d \;/\; \pi(x) = 0 \;\text{ et }\; \|x\| < \eta\} \; .$$

1) Soit $t_0 \in]0, T/2[$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $p(t) \notin \mathcal{P}_\eta$ pour tout $t \notin] - t_0, t_0[+ T\mathbb{Z}$. En déduire qu'il existe $\eta_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\eta \in]0, \eta_0[$, $p(t) \in \mathcal{P}_\eta$ si et seulement si $t \in T\mathbb{Z}$.

2) On note φ l'application de $\mathcal{P}_\eta \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_0, t) = \pi(x(t))$, où $x(t)$ est la solution de (1). Montrer que si η est assez petit, il existe une fonction $t^* \in \mathcal{C}^1(\mathcal{P}_\eta, \mathbb{R})$ telle que $t^*(0) = T$ et $\pi(x(t^*(x_0))) = 0$. On appelle application de Poincaré l'application P définie par $P(x_0) = x(t^*(x_0))$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in (0, \eta)$ tel que P envoie $\mathcal{P}_\varepsilon$ dans $\mathcal{P}_\eta$ et telle que $t^*(0)$ est le premier temps $t > 0$ pour lequel $x(t)$ rencontre $\mathcal{P}_\eta$.

3) Montrer que si $D_{|x_0=0}P$ n'a que des valeurs propres de module strictement plus petit que 1, alors l'orbite périodique $p(t)$ est asymptotiquement stable.
Indication : montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $A \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $AD_{|x_0=0}PA^{-1}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients hors diagonale de module plus petit que δ. En déduire qu'il existe une norme sur $\mathcal{P}_\eta$ pour laquelle $D_{|x_0=0}P$ est strictement contractante. Mettre en place le théorème de point fixe associé.