

Ecrit par Romain JOLY, inspiré de J.L. Durand et C. Lobry

Moyennisation d'oscillations rapides dans les EDO

Dans un système physique ou biologique, l'existence de plusieurs échelles de temps est courante : typiquement une échelle de temps lente qui correspond au temps d'observation et une échelle rapide qui correspond à des fluctuations du système. Les deux exemples que nous verrons dans ce texte sont :

- un pendule simple soumis à de très rapides oscillations du support,
- l'évolution d'une population animale soumise au cycle jours/nuits.

Pour traiter ces oscillations rapides, il est naturel de supposer que, puisque le système bouge peu par rapport aux oscillations, ces dernières agissent comme leur moyenne en temps. Nous allons montrer rigoureusement cette propriété dans le cas du pendule, puis nous verrons comment cette moyennisation peut avoir des conséquences surprenantes dans le modèle de la population animale.

1 Forçage rapide d'un pendule

On considère un pendule simple soumis à une force extérieure de petite période $\varepsilon > 0$. On note $\theta(t)$ l'angle du pendule avec la verticale. Dans l'approximation des petites oscillations, on trouve l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta(t) + f(t/\varepsilon), \quad (1)$$

où $f(t)$ est une fonction 1-périodique de moyenne nulle. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la force extérieure oscille très rapidement autour de 0. On s'attend à ce qu'elle se moyenne en temps et finisse donc par n'avoir plus d'influence sur le pendule. Nous pouvons en effet démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $n \geq 1$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ une fonction bornée telle que la limite*

$$F^* = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (2)$$

existe. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note X^ε la solution de l'équation différentielle

$$X^\varepsilon(0) = X_0, \quad \dot{X}^\varepsilon(t) = AX^\varepsilon(t) + F(t/\varepsilon). \quad (3)$$

Alors quand ε tend vers 0, X^ε tend sur tout compact vers la solution X de

$$X(0) = X_0, \quad \dot{X}(t) = AX(t) + F^*. \quad (4)$$

Démonstration : La solution de (3) s'écrit

$$X^\varepsilon(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} F(s/\varepsilon) ds .$$

De même,

$$X(t) = e^{At} X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} F^* ds .$$

Il suffit donc de comparer les deux intégrales. Par intégration par parties, on a que

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{A(t-s)} (F(s/\varepsilon) - F^*) ds \\ &= \left[e^{A(t-s)} \int_0^s (F(\tau/\varepsilon) - F^*) d\tau \right]_0^t + \int_0^t e^{A(t-s)} A \left(\int_0^s (F(\tau/\varepsilon) - F^*) d\tau \right) ds \\ &= \int_0^t (F(\tau/\varepsilon) - F^*) d\tau + \int_0^t e^{A(t-s)} A \left(\int_0^s (F(\tau/\varepsilon) - F^*) d\tau \right) ds . \end{aligned}$$

Pour montrer que la différence des intégrales tend vers 0 quand ε tend vers 0, il suffit alors d'utiliser le théorème de convergence dominée et de remarquer que (2) implique

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s F(\tau/\varepsilon) d\tau = F^*$$

et donc que $\int_0^s (F(\tau/\varepsilon) - F^*) d\tau \rightarrow 0$ pour tout s . □

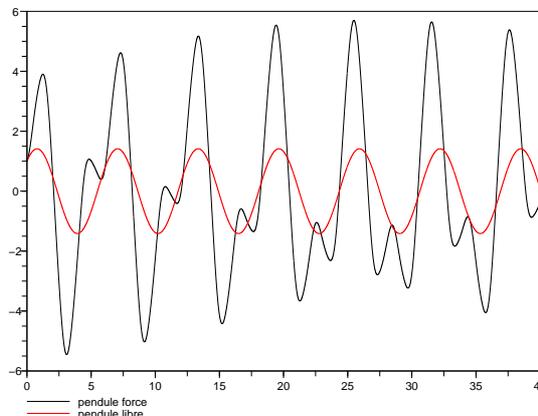
Pour appliquer le théorème 1.1 à l'équation (1), il faut mettre celle-ci sous forme d'un système du premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t/\varepsilon) \end{pmatrix} .$$

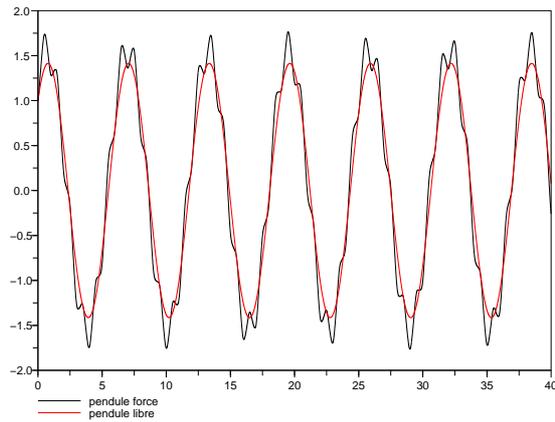
On obtient alors que, quand ε tend vers 0, les solutions de (1) tendent vers celles de l'équation du pendule libre

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta(t) .$$

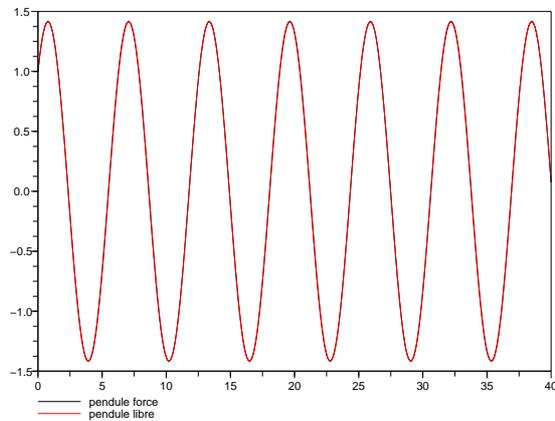
On vérifie numériquement ce résultat en prenant $f(t/\varepsilon) = 10 \cos^3(2\pi t/\varepsilon)$ et en comparant les trajectoires pour différentes valeurs de ε avec celles du pendule libre.



Comparaison d'une trajectoire du pendule libre avec celle du pendule forcé pour $\varepsilon = 3$.



Comparaison d'une trajectoire du pendule libre avec celle du pendule forcé pour $\varepsilon = 1$.



Comparaison d'une trajectoire du pendule libre avec celle du pendule forcé pour $\varepsilon = 0,1$.

2 Effet de la moyennisation dans un modèle de population larves/adultes

On considère une espèce animale possédant un stade larvaire. On note $L(t)$ le nombre de larves à l'instant t et $A(t)$ le nombre d'adultes. On introduit un coefficient $P \in [0, 1]$ donnant la proportion de larves réussissant à passer au stade adulte et un coefficient $M > 0$ de mortalité des adultes. Pour tenir compte des contraintes du milieu, on suppose que le nombre de larves engendrées par les adultes est borné et de la forme $V \frac{A(t)}{1+A(t)}$ avec $V > 0$. On obtient donc les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{L}(t) = -L(t) + V \frac{A(t)}{1+A(t)} \\ \dot{A}(t) = PL(t) - MA(t) \end{cases} \quad (5)$$

On peut décrire complètement les conditions de survie de l'espèce.

Théorème 2.1. *Si $PV > M$ alors $(V - M/P, PV/M - 1)$ et $(0, 0)$ sont les seuls équilibres de (5). Le premier est stable, le second instable.*

Si $PV < M$, il n'existe pas d'équilibre non-trivial pour (5) dans le quadrant positif et toute trajectoire de ce quadrant tend vers $(0, 0)$.

Démonstration : Dans le cas $PV > M$, le calcul des équilibres et des valeurs propres de leur linéarisation est direct. On trouve comme valeurs propres de $(0, 0)$ et de $(V - M/P, PV/M - 1)$ respectivement

$$\frac{-(M+1) \pm \sqrt{(M-1)^2 + 4PV}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(M+1) \pm \sqrt{(M-1)^2 + 4\frac{M^2}{PV}}}{2}.$$

Si $PV < M$, on ne trouve que $(0, 0)$ comme équilibre qui est alors stable. Par ailleurs, les solutions de (5) sont globalement bornées puisque si $L(t) \geq V + 1$ alors $\dot{L}(t) \leq -1$ et donc $L(t)$ fini toujours par être dans $[0, V + 1]$ pour t assez grand. Par le même raisonnement, une fois que $L(t) \in [0, V + 1]$, $A(t)$ décroît jusqu'à appartenir à $[0, 1 + P(V + 1)/M]$. D'après le théorème de Poincaré-Bendixson, toute trajectoire tend soit vers 0, soit vers une trajectoire périodique du quadrant positif. Or, tout champ de vecteurs ayant une orbite périodique dans \mathbb{R}^2 doit avoir un point critique à l'intérieur de la courbe formée par cette orbite. Comme $(0, 0)$ est le seul équilibre, il n'y a pas d'orbite périodique et les trajectoires tendent vers $(0, 0)$. \square

L'interprétation du théorème 2.1 est que la condition $PV > M$ est nécessaire et suffisante à la survie de l'espèce.

On suppose maintenant que les coefficients P , V et M dépendent du temps. Plus précisément, on suppose qu'il existe une fonction $a(t)$ oscillant entre 0 et 1 et de moyenne $1/2$ telle que les coefficients P , V et M soient donnés par

$$\begin{cases} P(t) = a(t)P_1 + (1 - a(t))P_2 \\ V(t) = a(t)V_1 + (1 - a(t))V_2 \\ M(t) = a(t)M_1 + (1 - a(t))M_2 \end{cases}$$

avec les valeurs de P_i , V_i et M_i à choisir. On obtient le système non-autonome

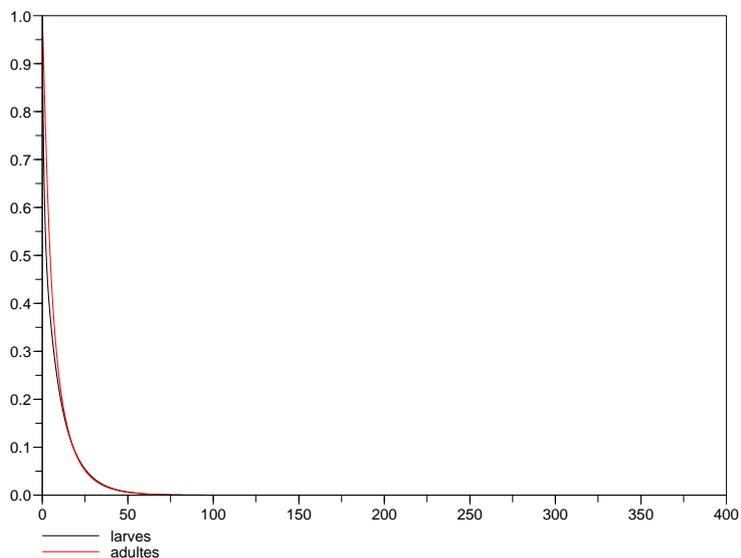
$$\begin{cases} \dot{L}(t) = -L(t) + V(t)\frac{A(t)}{1+A(t)} \\ \dot{A}(t) = P(t)L(t) - M(t)A(t) \end{cases} \quad (6)$$

On suppose que les oscillations de a sont très rapides, par exemple que $a(t)$ représente les cycles jours/nuits par rapport à une évolution sur plusieurs années. On se retrouve devant un problème de moyennisation similaire au théorème 1.1. On admettra que le système (6) se comporte comme le système autonome (5) avec les coefficients moyens

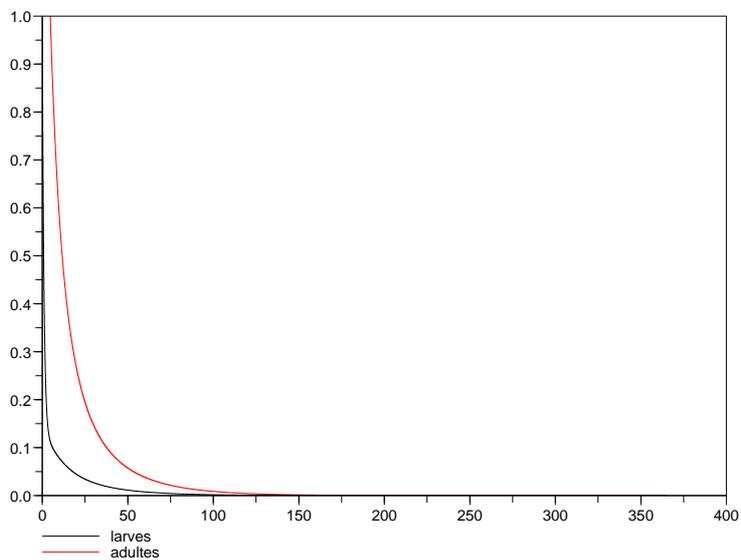
$$P^* = (P_1 + P_2)/2, \quad V^* = (V_1 + V_2)/2 \quad \text{et} \quad M^* = (M_1 + M_2)/2.$$

Ce qui est surprenant est qu'il est possible que $P_1V_1 < M_1$ et $P_2V_2 < M_2$ alors que $P^*V^* > M^*$. Autrement dit, *les conditions nocturnes et diurnes sont chacune défavorables à la*

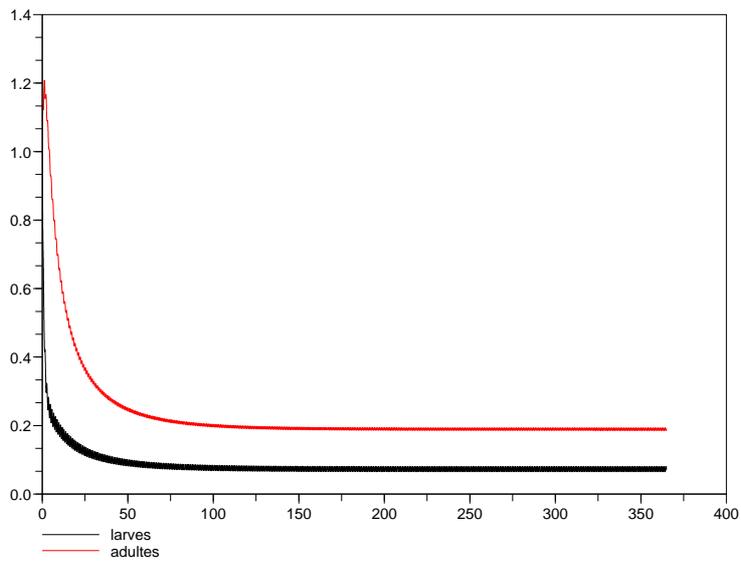
survie à long terme de l'espèce, mais le cycle jours/nuits rend la population de l'espèce stable ! Ceci est un effet particulièrement important de la moyennisation : de rapides oscillations peuvent rendre stable un système qui ne l'était pas.



L'évolution de la population sur un an selon le modèle autonome (5) avec $P = 0,2$, $V = 1$ et $M = 0,3$.



L'évolution de la population sur un an selon le modèle autonome (5) avec $P = 0,8$, $V = 0,2$ et $M = 0,2$.



Stabilisation par oscillations quotidiennes sur un an selon le modèle (6) avec $P_1 = 0,2$, $V_1 = 1$ et $M_1 = 0,3$ et $P_2 = 0,8$, $V_2 = 0,2$ et $M_2 = 0,2$.

Suggestions de développement :

- expliquer comment le modèle (1) est obtenu.
- simuler l'équation du pendule forcé (1) dans laquelle la force périodique est remplacée par un bruit aléatoire de moyenne nulle.
- discuter le modèle (5).
- détailler la preuve du théorème 2.1.
- justifier l'utilisation de la moyennisation dans le modèle (6).