Ecrit par Romain JOLY

Propagation de la lumière à travers une interface

1 Propagation de la lumière et équation des ondes

La lumière est une onde électromagnétique. Dans un milieu homogène non chargé et non polarisé, les évolutions du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sont données par les équation de Maxwell

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}(\overrightarrow{E}(x,t)) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}(x,t)}{\partial t} &\qquad &\mathrm{rot}(\overrightarrow{B}(x,t)) = \varepsilon\mu \frac{\partial \overrightarrow{E}(x,t)}{\partial t} \\ &\mathrm{div}(\overrightarrow{E}(x,t)) = 0 & &\mathrm{div}(\overrightarrow{B}(x,t)) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

où ε et μ sont des constantes positives appelées respectivement permittivité diélectrique et perméabilité magnétique. On rappelle que pour un champ de vecteur $V = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et une fonction scalaire f, on a les notations standards suivantes :

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} \qquad \Delta V(x) = (\Delta V_1(x)\ ,\ \Delta V_2(x)\ ,\ \Delta V_3(x))$$

$$\mathrm{grad}(f(x)) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\ ,\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right) \qquad \mathrm{div}(V(x)) = \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3(x)}{\partial x_3}$$

$$\text{et } \mathrm{rot}(V(x)) = \left(\frac{\partial V_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_3}\ ,\ \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3(x)}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1(x)}{\partial x_2} \right)\ .$$

Les opérateurs Δ, grad, div et rot sont respectivement appelés laplacien, gradient, divergence et rotationnel. En prenant le rotationnel de la première équation de (1), on trouve que

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\overrightarrow{E})) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}\ .$$

En utilisant l'identité remarquable $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(V)) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(V)) - \Delta V$ et en posant $c = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}$, on trouve que $\overrightarrow{E}$ satisfait à

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta \overrightarrow{E}(x,t)\ ,\ \mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = 0\ , \tag{2}$$

où c est appelée vitesse de la lumière dans le milieu. On considère une onde électrique $\overrightarrow{E} = (E_1, E_2, E_3)$ qui est polarisée selon la direction x_2 i.e. telle que $E_1 = E_3 = 0$. Comme $\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = 0$, E_2 ne dépend pas de x_2. Si on suppose en outre que le champ se déplace de façon rectiligne, E_2 ne dépend que d'une direction du plan (x_1, x_3) et de t, par exemple que de x_1 et t. En posant $u = E_2$, on trouve l'équation des ondes scalaire classique sur la droite réelle

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \Delta u(x,t) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \end{cases} \tag{3}$$

où g et h sont des fonctions données initialement.

2 Solutions de l'équation des ondes dans un milieu infini homogène

2.1 Formule de d'Alembert

Par un calcul explicite, on voit que si g et h sont deux fois dérivables, alors la solution de (3) est donnée par la formule de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x-ct) + g(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\xi)\ d\xi \ . \tag{4}$$

En particulier, on note que la valeur de $u(x,t)$ ne dépend des données initiales que sur le segment $[x - ct, x + ct]$. On dit que l'information se propage à vitesse c dans le milieu. On note en outre qu'une onde électrique de la forme $u(x,t) = v(x - ct)$ est solution de l'équation des ondes (3), justifiant ainsi l'appellation "vitesse de la lumière" pour la constante c.

2.2 Schéma explicite pour l'équation des ondes

On ne peut évidemment pas simuler l'équation des ondes sur un domaine non borné comme $\mathbb{R}$. Toutefois, on a vu que l'information se déplace dans (3) à vitesse finie. On peut donc simuler l'équation sur un domaine borné assez grand pour que ce qui se passe au bord n'influence pas la partie qui nous intéresse. Sans perte de généralité, on peut considérer que l'on simule l'équation des ondes sur l'intervalle $I = [0,1]$ avec des conditions aux bords de type Dirichlet. Soit δx et δt les pas de discrétisations en espace et temps. On note U_j^k la valeur approchant $u(j\delta x, k\delta t)$. Au temps $t = k\delta t$, la solution $u(.,t)$ est approchée par le vecteur $U^k = (U_j^k)_{j=1,\ldots,n}$ avec $n = 1/\delta x - 1$ (les valeurs de $u(.,t)$ aux bords sont nulles et ne sont pas incluses dans la discrétisation U^k). Le schéma aux différences finies pour (3) s'écrit donc

$$\frac{U^{k+1} - 2U^k + U^{k+1}}{\delta t^2} = c^2 A U^k \ ,$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

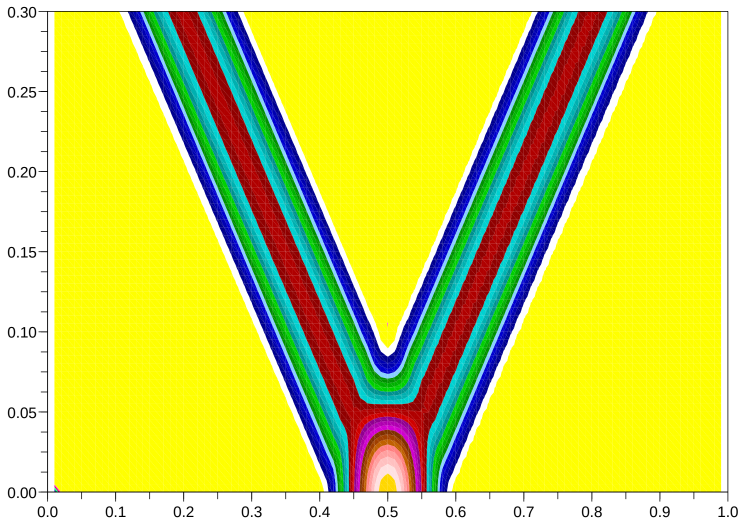
On suppose donné initialement les vecteurs U^0 et U^1. A chaque pas de temps, on peut calculer de façon explicite U^{k+1} en fonction de U^k et U^{k-1} par

$$U^{k+1} = 2U^k - U^{k-1} + (c\delta t)^2 AU^k \ . \tag{6}$$

On garde alors la mémoire de U^{k+1} et U^k pour le pas de temps suivant.

Pour éviter que le schéma n'explose, il faut s'assurer que $\delta x/\delta t > c$. Intuitivement cela signifie que l'information dans le schéma numérique ne doit pas se propager plus lentement que dans l'équation des ondes.

Ci-dessous, une simulation avec $c = 1$ et comme données initiales $U^0 = U^1$ localisées en espace :



Propagation de deux ondes à partir d'une donnée initiale localisée. On a représenté la solution sous forme de courbes de niveau ; l'espace est en abcisse, le temps en ordonnée.

On note la propagation de deux ondes de vitesse ± 1 comme prédit par la formule de d'Alembert (4).

3 Passage des ondes à travers une interface

3.1 Etude théorique

On souhaite comprendre comment se comporte une onde lumineuse rencontrant une interface entre deux milieux. On supposera que le demi-espace $]-\infty, 0]$ correspond à un milieu où la lumière se déplace à vitesse égale à 1 (modulo un changement d'unité il n'y a pas de perte de généralité). Le demi-espace $[0, +\infty[$ est rempli par un milieu où la lumière se déplace à vitesse c_+. On utilise la notation $u_\pm = u_{|\mathbb{R}_\pm}$. L'équation (3) devient alors

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_-(x,t) = \Delta u_-(x,t) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_+(x,t) = c_+^2 \Delta u_+(x,t) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ u_-(0,t) = u_+(0,t) \ , \ \frac{\partial}{\partial x} u_-(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} u_+(0,t) \\ u(x,0) = g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \end{array}\right. \tag{7}$$

On supposera que l'onde lumineuse part de la gauche, i.e. $g_{|\mathbb{R}_+} = h_{|\mathbb{R}_+} = 0$. On note $\tilde{u}$ la solution de l'équation des ondes (3) avec $c = 1$ et les mêmes données initiales que (7). Autrement dit, $\tilde{u}$ représente la propagation de la lumière en l'absence du milieu de vitesse c_+. On cherche la solution u de (7) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} u_-(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \alpha\tilde{u}(-x,t) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+ \\ u_+(x,t) = \beta\tilde{u}(x/c_+,t) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \end{array}\right.$$

On vérifie qu'une telle fonction u vérifie (7) si et seulement si $\alpha = (c_+ - 1)/(c_+ + 1)$ et $\beta = 2/(1 + 1/c_+)$. Ainsi, lorsqu'une onde lumineuse rencontre une interface entre deux milieux, il se crée alors deux ondes :
- une onde réfléchie d'intensité $|c_+ - 1|/(c_+ + 1)$ par rapport à l'onde initiale,
- une onde transmise d'intensité $2c_+/(1 + c_+)$.
On notera que par conservation de l'énergie, la somme des carrés des intensités relative est égale à un.

3.2 Simulation numérique

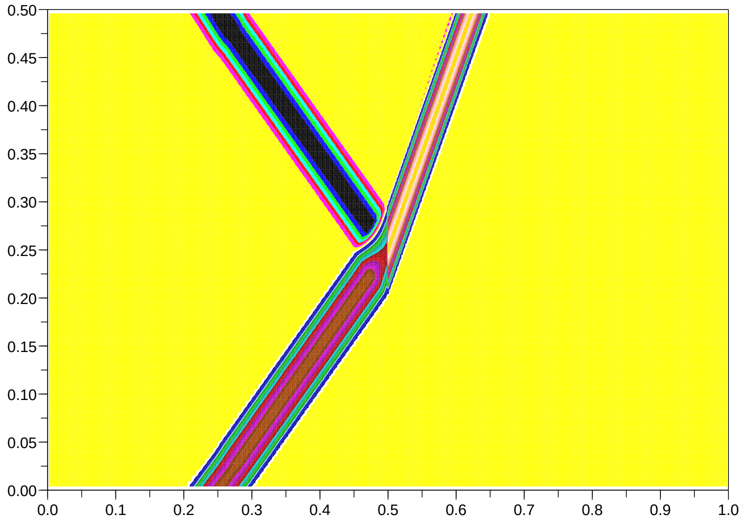
On reprend le même schéma aux différences finies (6) avec $c = 1$, mais en remplaçant A par B donné par

$$B = \frac{1}{\delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & (0) & & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & & & & & \\ & & 1 & -2 & c_+ & & & & \\ & & & c_+ & -2c_+^2 & c_+^2 & & & \\ & & & & c_+^2 & \ddots & \ddots & & \\ & & (0) & & & \ddots & \ddots & c_+^2 & \\ & & & & & & c_+^2 & -2c_+^2 & \end{pmatrix} \tag{8}$$

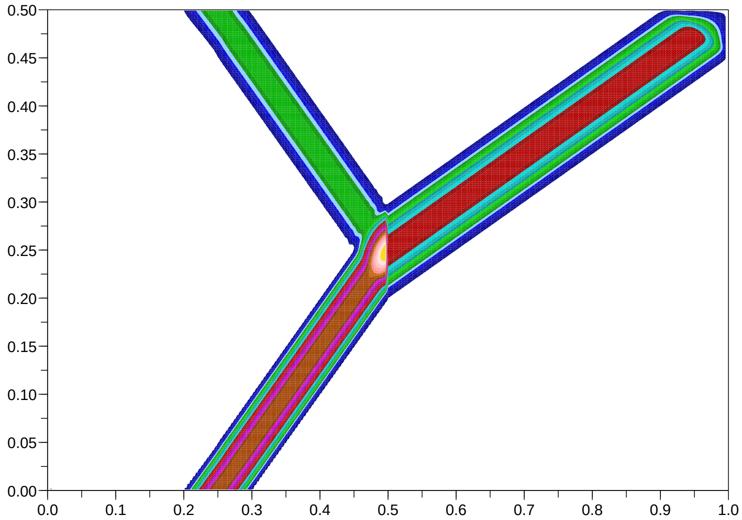
ou autrement dit $B = {}^tCAC$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & c_+ & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & c_+ \end{pmatrix}.$$

En prenant une donnée initiale localisée dans la partie de gauche du segment de discrétisation, on retrouve bien les deux ondes transmises et réfléchie.



Propagation d'une onde à travers une interface pour $c_+ = 0,5$. On a représenté la solution sous forme de courbes de niveau ; l'espace est en abcisse, le temps en ordonnée.



Propagation d'une onde à travers une interface pour $c_+ = 2$.

Suggestions de développement :
- détailler le passage des équations de Maxwell à l'équation des ondes.
- prouver la formule de d'Alembert. La vérifier numériquement.
- discuter de la discrétisation et du problème de l'explosion du schéma numérique.
- détailler la construction de la solution de (7).
- tester numériquement les intensités relatives des ondes transmises et réfléchies.