

## Analyse de Fourier et applications

Soit  $N \in \mathbb{N}$  et soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  un signal physique (pression de l'air, rayonnement électro-magnétique ...). On appelle *signal discret* ou *échantillonnage* la donnée des nombres  $f_n = f(n/N)$  avec  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  issus d'une série de  $N$  mesures régulièrement espacées.

**Exercice 1 :** On prend comme convention pour la transformation de Fourier les formules

$$c(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2in\pi x} dx \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)e^{2ik\pi x} .$$

Soit  $K \in \mathbb{N}$ . Calculer les  $K$  premiers coefficients de Fourier d'un signal  $f$  à l'aide d'une méthode des rectangles basée sur le signal discret. Recomposer ensuite le signal original par la transformée de Fourier inverse. Que constatez vous si  $K > N$  ? Comment expliquez vous ce phénomène appelé repliement du spectre (*aliasing*) ? Quel est la bonne valeur de  $K$  à prendre ?

Désormais, on se concentre sur le signal discret et on pose  $K = N$ . On appelle transformation de Fourier discrète de  $(f_n)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$  les coefficients  $(c_k)_{k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$  donnés par

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2ik\pi \frac{n}{N}} .$$

Le signal se recompose par la transformation inverse

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2in\pi \frac{k}{N}} .$$

**Exercice 2 :** Programmer une fonction effectuant la transformation de Fourier discrète et une autre effectuant la transformée inverse. Observer la transformée d'un signal issu d'un polynôme trigonométrique, d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  et d'un signal aléatoire.

**Exercice 3 :** La méthode la plus rapide pour faire une transformation de Fourier discrète est la FFT (*Fast Fourier Transform*). Celle-ci part de la constatation suivante. Si  $N = 2M$

est pair, alors

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{2M} \left( \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j} e^{-2ik\pi \frac{2j}{2M}} + \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j+1} e^{-2ik\pi \frac{2j+1}{2M}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j} e^{-2ik\pi \frac{j}{M}} + \frac{e^{-i\frac{k}{M}\pi}}{M} \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j+1} e^{-2ik\pi \frac{j}{M}} \right)
 \end{aligned}$$

On pose donc  $(a_k)$  et  $(b_k)$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^M$  composés des transformées de Fourier discrètes des vecteurs  $(f_{2j})_{j \in [0, M-1]}$  et  $(f_{2j+1})_{j \in [0, M-1]}$ . On a

$$\forall k \in [0, M-1], c_k = \frac{1}{2}(a_k + e^{-i\frac{k}{M}\pi} b_k) \quad \text{et} \quad \forall k \in [M, N-1], c_{M+k} = \frac{1}{2}(a_k - e^{-i\frac{k}{M}\pi} b_k).$$

En déduire un algorithme récursif pour la transformation de Fourier discrète d'un signal tel que  $N$  est une puissance de 2 et le programmer.

### Application à l'astrophysique

Comment faire pour connaître la composition chimique d'un astre lointain ? Chaque atome possède un rayonnement qui lui est particulier : les photons émis n'ont que certaines fréquences très particulières. On peut donc observer le spectre du signal lumineux de l'étoile et reconnaître les marques particulières de certains éléments chimiques, voir figure 1. Pour simuler cette observation, construire un signal composé uniquement de certaines

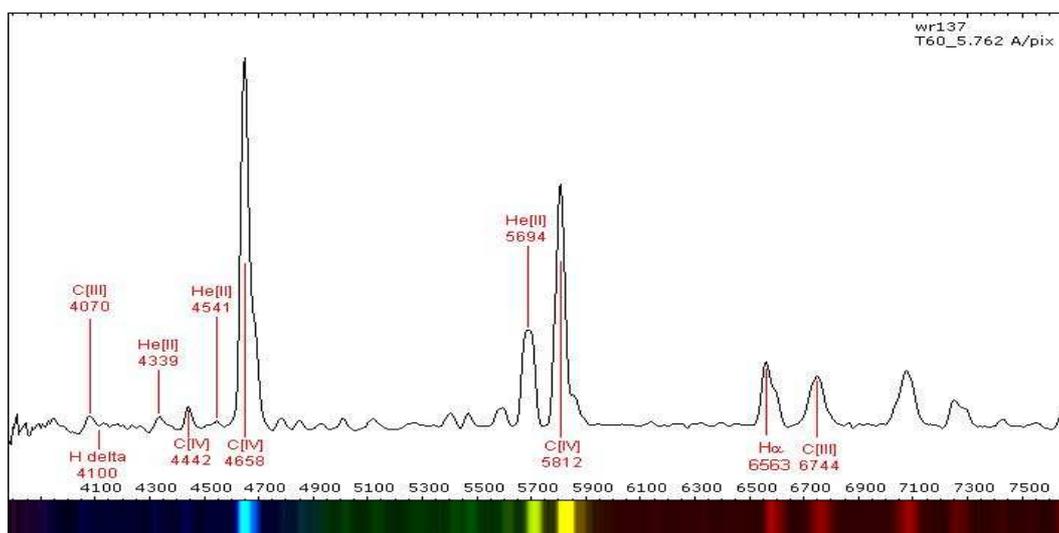


Fig. 1: le spectre de l'étoile Wolf-Rayet Wr137 réalisé au T-60 du Pic du Midi.

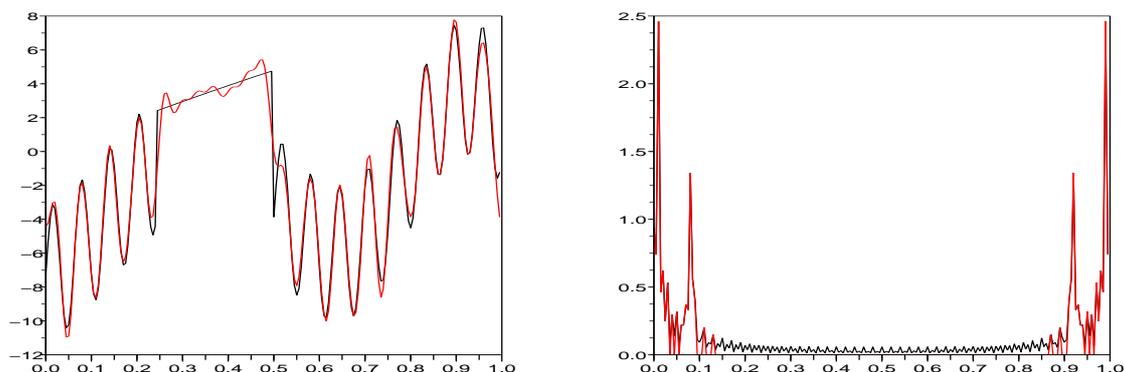
fréquences, le bruitez légèrement et observer sa transformée de Fourier.

### Application au débruitage

Pour débruiter un signal, on considère que les fréquences les plus importantes sont les plus basses. On écrase donc toutes les fréquences trop élevées (filtre *passé-bas*). Observer l'effet obtenu. On pourra noter le phénomène de Gibbs qui se manifeste par des vaguelettes près des contours (i.e. des variations brusques).

### Application à la compression de signaux

Pour compresser un signal, on effectue sa transformation de Fourier et on ne garde que les fréquences dont le coefficient est parmi ceux de plus grande valeur. On stocke les coefficients à garder et le numéro de la fréquence correspondante, ce qui fait beaucoup moins de données que le signal d'origine. On recrée sur demande le signal par une transformation de Fourier inverse. C'est le principe de la compression *jpeg* pour les images. La compression *mp3* est



**Fig. 2:** un signal test compressé à 80%. Notez le phénomène de Gibbs sur le plateau.

aussi basée sur ce principe mais utilise aussi diverses astuces : suppression des fréquences inaudibles, codage en mono des sons de basse, suppression des sons masqués par d'autres fréquences. . .

### Un mot sur les ondelettes

Les idées derrière ces applications pourraient s'appliquer à d'autres bases hilbertiennes que celles des polynômes trigonométriques. Dans le cas de signaux vibratoires, la base de Fourier est bien adaptée. Elle l'est beaucoup moins pour d'autres formes, comme les images

(voir la différence entre le traitement des ondulations et du plateau dans la figure 2). La création d'autres bases hilbertiennes mieux adaptées a abouti à la théorie des ondelettes. Voici l'exemple le plus simple des *ondelettes de Haar* qui forme une base hilbertienne de  $L^2(]0, 1[)$ . On pose

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ -1 & \text{si } x \in [1, 2[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La base de Haar  $(\psi_{j,k})$  est la restriction à  $]0, 1[$  des translations et dilatations de  $\psi$ . Plus précisément,  $\psi_{0,0} \equiv 1$  et

$$\forall j \in \mathbb{N}^* , \forall k \in \llbracket 0, 2^j - 1 \rrbracket , \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{(j-1)/2} \psi(2^j x - k) .$$